Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Tore August Kro
Telefon: (735) 91827

Eksamen i MA1201 Lineær algebra og geometri

Mandag 12. desember 2005
Tid: 09:00 – 13:00

Hjelpemidler: Ingen hjelpemidler tillatt.

Hvert av de 10 punktene teller likt.

Alle svar skal begrunnes. Du må ta med så mye mellomregning at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1

a) Finn redusert trappeform for matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 4 & 7 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$ og løs ligningssystemet

$$\begin{array}{rcrcrl} x & + & 2y & + & 3z & = 3 \\ 4x & + & 7y & + & 2z & = 1 \\ 3x & + & 5y & - & 2z & = -3 \end{array}$$

b) For hvilke a har ligningssystemet

$$\begin{array}{rcrcrl} x & + & 2y & + & 3z & = 3 \\ 4x & + & 7y & + & 2z & = 1 \\ 3x & + & 5y & + & az & = -3 \end{array}$$

ingen løsning, nøyaktig en løsning, uendelig mange løsninger?

Oppgave 2

Skriv $w = 2 - 2\sqrt{3}i$ på polarform og finn 2. røttene til w. Løs ligningen $(z+2)^2 = 2 - 2\sqrt{3}i$.

Oppgave 3

a) Finn egenverdiene til matrisen $A = \begin{bmatrix} 9 & -12 \\ -12 & 16 \end{bmatrix}$, og finn tilhørende egenvektorer. Normaliser disse egenvektorene. Sett opp en ortogonal matrise P slik at $P^T AP = D$ er diagonal. Er den kvadratiske formen $9x^2 - 24xy + 16y^2$ positivt definitt?

b) Avgjør om kjeglesnittet gitt ved ligningen

$$9x^2 - 24xy + 16y^2 + 20x + 15y = 0$$

er en ellipse, parabel eller hyperbel, og tegn en skisse av løsningsmengden.

Oppgave 4

La $P = (3, -1, -2)$, $Q = (1, -1, -1)$ og $R = (-1, 0, 1)$.

a) Finn arealet av trekanten med hjørner i P, Q og R.

b) Avgjør om punktet $S = (-1, 3, 4)$ ligger i planet bestemt av punktene P, Q og R.

Oppgave 5

En transformasjon $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ kan beskrives ved

$$T(x, y) = (f(x, y), g(x, y)) \quad , \tag{*}$$

hvor f og g er reelle funksjoner i to variable.

a) La $f(x, y) = y$ og $g(x, y) = 2x - y$. Det oppgis at T gitt ved formelen (*) i dette tilfellet blir lineær. Regn ut $T(1, 0)$ og $T(0, 1)$, og skriv opp standardmatrisen til T.

b) Gi et eksempel på en transformasjon $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ som **ikke** er lineær. Med ditt valg av T finn

enten reelle tall x, y og c slik at $T(cx, cy) \neq cT(x, y)$,

eller reelle tall x_1, y_1, x_2 og y_2 slik at $T(x_1 + x_2, y_1 + y_2) \neq T(x_1, y_1) + T(x_2, y_2)$.

Oppgave 6

La A være en 2×2 matrise og P en ortogonal 2×2 matrise. Vis at A er symmetrisk hvis og bare hvis $P^{-1}AP$ er symmetrisk.