Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Dagfinn F. Vatne (901 38 621)

EKSAMEN I LINEÆR ALGEBRA OG GEOMETRI (MA1201)

Fredag 15. desember 2006
Tid: 09:00 – 13:00 Sensur 10. januar 2007

Hjelpemidler:
Ingen tillatte hjelpemidler

Oppgavesettet består av 7 oppgaver. På alle oppgaver bortsett fra Oppgave 7 skal dere begrunne svarene deres.

Oppgave 1

a) Finn redusert trappeform for matrisa $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -4 & 0 \\ 2 & 4 & -6 & 2 \\ -1 & -3 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ og løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + y - 4z &= 0 \\ 2x + 4y - 6z &= 2 \\ -x - 3y + 2z &= -2 \end{aligned}$$

b) For hvilke reelle verdier av a har ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + y - 4z &= 0 \\ 2x + 4y - 6z &= 2 \\ -x - 3y + (a^2 - 2)z &= a \end{aligned}$$

ingen løsning, nøyaktig én løsning, uendelig mange løsninger?

Oppgave 2

a) Finn alle komplekse tall z som løser ligningen $(z-i)^3 = -8$.

b) Vis at $(\overline{z})^2 = z^2$ hvis og bare hvis z er enten reell eller rent imaginær.

Oppgave 3

a) La A være 2×2-matrisa $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$. Finn en ortogonal matrise P med determinant 1 slik at $P^{-1}AP = D$, hvor D er en diagonalmatrise.

b) Beskriver ligningen $x^2 - 4xy + y^2 = 9$ en ellipse, hyperbel eller parabel i xy-planet? Skissér kjeglesnittet i xy-planet.

Oppgave 4 Finn en ligning for planet P som inneholder både punktet $(1, 1, 1)$ og linjen l_1 gitt ved ligningene $x = 2 + t$, $y = 0 + 2t$, $z = 1 + 2t$ $(-\infty < t < \infty)$.

Oppgave 5 La $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$ og la $T_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ være den tilhørende lineære transformasjonen. Finn $T_A(3, -5, 2)$.

La $A^{(a)}$ være matrisen

$$A^{(a)} = \begin{bmatrix} a & 1 & 4 \\ 2 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

For hvilke verdier av a er den tilhørende lineære transformasjonen $T_{A^{(a)}}$ 1-1?

Oppgave 6 La A og B være to $n \times n$-matriser. Bevis følgende:

Produktet AB er ikke inverterbart $\Leftrightarrow$ Enten A eller B (eller begge) er ikke inverterbar.

Oppgave 7 Avgjør hvilke av følgende utsagn som er **SANNE**. Svarene skal ikke begrunnes.

- **a)** $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -\mathbf{v} \times \mathbf{u}$, der $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ er i $\mathbb{R}^3$ og $\times$ er kryssproduktet
- **b)** $AB = BA$, der A og B er 3×3-matriser
- **c)** En symmetrisk 3×3-matrise A er alltid inverterbar
- **d)** La A være en inverterbar matrise. Da er $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A$
- **e)** La E være en elementærmatrise. Da har vi $|\det E| = 1$
- **f)** $\det(A + B) = \det A + \det B$, der A og B er 3×3-matriser
- **g)** La $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ være i $\mathbb{R}^3$. Da er skalarproduktet $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ gitt ved $||\mathbf{u}|| \cdot ||\mathbf{v}|| \cdot \cos\theta$, der θ er vinkelen mellom $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$
- **h)** $\mathbf{u} \times \mathbf{u} = \mathbf{u}$ for $\mathbf{u}$ i $\mathbb{R}^3$
- **i)** $||k\mathbf{u}|| = |k| \cdot ||\mathbf{u}||$, der $k \in \mathbb{R}$ og $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^4$
- **j)** $||\mathbf{u} + \mathbf{v}||^2 = ||\mathbf{u}||^2 + ||\mathbf{v}||^2$ for alle $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ i $\mathbb{R}^3$