Noen tips om Gauss-Jordan-eliminasjon

Her er noen tips jeg bruker når jeg skal GJ-eliminere matriser for å minimalisere sannsynligheten for regnefeil. Kanskje noen av dere vil ha nytte av dem.

1) Utnytt minuser først i rader - det er lettere å legge sammen uten å måtte gange med en ekstra minus i tillegg.

2) Unngå brøker helt til du ikke har noe valg lenger. Dette lar seg ofte gjøre vha. litt kreativ aritmetikk.

3) Kalkulatoren er min venn.

Her er et eksempel som illustrerer hva jeg mener:
Skal løse ligningssystemet

$$\begin{array}{rcrcrcr} -x & + & 4y & + & z & = & -3 \\ x & + & 9y & - & 2z & = & 4 \\ 6x & + & 4y & - & 8z & = & -5 \end{array}.$$

Dette gir oss den utvidede matrisen

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 & -3 \\ 1 & 9 & -2 & 4 \\ 6 & 4 & -8 & -5 \end{bmatrix}.$$

Siden det allerede står en minus først i øverste rad velger jeg å legge 6 ganger rad 1 til rad 3 i stedet for $-1 \cdot 6$ ganger rad 2 til rad 3. Det er rett og slett mindre sjanse for regnefeil når jeg kan legge $6 \cdot 4$ til 4 enn når jeg må legge $-1 \cdot 6 \cdot 9$ til 4 i kolonne 2 (og tilsvarende for de andre kolonnene). Resultatet blir da som følger:

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & 1 & -3 \\ 1 & 9 & -2 & 4 \\ 0 & 28 & -2 & -23 \end{bmatrix}$$

Videre legger jeg rad 2 til rad 1, siden jeg da får en ledende ener med en gang. Alternativet er å legge rad 1 til rad 2 og så gange rad 1 med -1. Det er to operasjoner og argumentet for å gjøre det slik er at jeg da får en ledende ender i øverste rad. Men rekkefølgen på radene kan jo endres når som helst og betyr egentlig ingenting på dette tidspunktet så jeg gjør det som er enklest. Matrisen ser nå slik ut:

$$\begin{bmatrix} 0 & 13 & -1 & 1 \\ 1 & 9 & -2 & 4 \\ 0 & 28 & -2 & -23 \end{bmatrix}$$

Her kunne jeg enten delt rad 1 på 13 eller rad 3 på 28, men det gir stygge brøker og bare tanken på å måtte regne med 13-deler eller 28-deler gir meg frysninger på ryggen. Men hvis jeg stopper opp og ser litt på tallene observerer jeg at $2 \cdot 13 = 26$, så da må $-2 \cdot 13 + 28 = 2$. Ved å legge -2 ganger øverste rad til nederste rad blir jeg dermed kvitt 28'ern og står igjen med et mye mer praktisk 2-tall. Matrisa blir da som følger:

$$\begin{bmatrix} 0 & 13 & -1 & 1 \\ 1 & 9 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -25 \end{bmatrix}$$

Fortsatt et stykke igjen men ennå ingen brøker! Neste observasjon jeg gjør meg er at $13 - 6 \cdot 2 = 1$, så ved å legge -6 ganger nederste rad til øverste har jeg fått meg enda en ledende ener og fortsatt er det bare heltall i matrisa!

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 151 \\ 1 & 9 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -25 \end{bmatrix}$$

Nå er det neste logiske steget (?) å legge -2 ganger rad 1 til rad 3:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 151 \\ 1 & 9 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & -327 \end{bmatrix}$$

Som du sikkert observerer har tallene i kolonnen lengst til høyre nå begynt å bli ganske store, så nå er jeg veldig glad for at jeg har en kalkulator foran meg som gjør disse multiplikasjonene for meg. Trekker 9 ganger rad 1 fra rad 2:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 151 \\ 1 & 0 & 7 & -1355 \\ 0 & 0 & 2 & -327 \end{bmatrix}$$

Nå kommer jeg til et punkt der jeg ser meg tvunget til å innføre brøker, jeg må nok dele rad 3 på 2.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & 151 \\ 1 & 0 & 7 & -1355 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-327}{2} \end{bmatrix}$$

Legger rad 3 til rad 1:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{-25}{2} \\ 1 & 0 & 7 & -1355 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-327}{2} \end{bmatrix}$$

Trekker 7 ganger nederste rad fra rad nummer 2:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \frac{-25}{2} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{-421}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-327}{2} \end{bmatrix}$$

Bytter om rad 1 og rad 2 og får følgende resultat:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{-421}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-25}{2} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-327}{2} \end{bmatrix}$$

Det er mulig at jeg kunne gjort denne reduksjonen i færre steg ved å være villig til å innføre brøker på et tidligere tidspunkt, men da hadde sannsynligheten for at jeg hadde regnet feil underveis vært mye større. Samtidig er jo folk forskjellige så noen vil nok synes at dette var vel så komplisert som "standardmetoden"!

Mvh. Anette