Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen:
Per Hag   Telefon: 73 59 17 43

EKSAMEN I LINEÆR ALGEBRA OG GEOMETRI (MA1201/MA6201)

Bokmål
Dato: Fredag 4. desember 2009
Tid: 09:00 – 13:00

Hjelpemidler:
Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt enkel kalkulator tillatt.

Sensur: 25. desember.

Alle svar skal begrunnes. Alle punkter veies likt under vurdering av eksamen.

Oppgave 1 Bestem a, b og c slik at kurven gitt ved:

$$y = ax^2 + bx + c$$

går gjennom punktene $(1, -4)$, $(-1, 0)$ og $(2, 3)$.

Oppgave 2 Bestem α slik at likningsystemet:

$$\begin{array}{rcrcr} 3x_1 & - & x_2 & = & -10 \\ 7x_1 & + & 2x_2 & = & 7 \\ 2x_1 & - & 5x_2 & = & \alpha \end{array}$$

er løsbart. Bestem løsningen i dette tilfellet.

Oppgave 3

a) Vis at dersom vektoren $\mathbf{v}$ er ortogonal på både $\mathbf{w}_1$ og $\mathbf{w}_2$, så vil $\mathbf{v}$ være ortogonal på

$$k_1\mathbf{w}_1 + k_2\mathbf{w}_2$$

for hvert valg av reelle tall k_1 og k_2.

b) La $\mathbf{w}_1 = (1, 1, -2)$, $\mathbf{w}_2 = (2, 0, -1)$ og $\mathbf{v} = (-1, 1, 5)$. Bestem reelle tall k_1 og k_2 som ikke begge er lik 0 slik at $\mathbf{v}$ er ortogonal på $k_1\mathbf{w}_1 + k_2\mathbf{w}_2$.

c) Anta at det finnes reelle tall k_1 og k_2 som ikke begge er lik 0 slik at $\mathbf{v}$ er ortogonal på $k_1\mathbf{w}_1 + k_2\mathbf{w}_2$. Må da $\mathbf{v}$ nødvendigvis være ortogonal på såvel $\mathbf{w}_1$ som $\mathbf{w}_2$? Gi et bevis eller et moteksempel.

Oppgave 4

a) Skriv -4 på polarkoordinatform og benytt dette til å finne alle komplekse røtter av likningen:

$$z^4 + 4 = 0.$$

b) Vis at $x = -1$ er en rot i likningen:

$$x^5 + x^4 + 4x + 4 = 0$$

Benytt dette og resultatet i **a)** til å skrive polynomet

$$p(x) = x^5 + x^4 + 4x + 4$$

som et produkt av 1.- og 2.gradspolynom med reelle koeffisienter.

Oppgave 5

a) Skriv den kvadratiske formen

$$q(x, y) = 2xy$$

vha. et matriseprodukt av formen

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

b) Bestem egenverdiene til matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Finn tilhørende egenvektorer $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ av lengde 1.

c) Bestem en invertibel matrise P slik at $P^{-1}AP = D$ der A er matrisen i **b)** og D er en diagonalmatrise av formen:

$$D = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

der λ_1 og λ_2 er egenverdiene til matrisen i **b)**.

d) Benytt det ovenstående til å skissere kurven

$$2xy + 2\sqrt{2}x = 1$$

i xy-planet. Hvilken type kjeglesnitt blir dette?

Oppgave 6 Anta A er en $n \times n$-matrise slik at summen av leddene i hver kolonne er lik 0, dvs. dersom A er matrisen

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

så er

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} = a_{1j} + a_{2j} + a_{3j} + \cdots + a_{nj} = 0$$

for alle $1 \leq j \leq n$. Bevis at da må $\det(A) = 0$.