Norges teknisk–
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

Faglig kontakt under eksamen: Anita Valenta
Telefon: 977 37 661

Eksamen i MA1201 Lineær algebra og geometri

Torsdag 26. mai 2005
Kl. 09.00-13.00

Hjelpemidler: Ingen hjelpemidler tillatt.

Hvert av de 9 punktene teller likt.

Alle svar skal begrunnes. Du må ta med så mye mellomregninger at fremgangsmåten fremgår tydelig av besvarelsen.

Oppgave 1

a) Finn redusert trappeform for matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$ og løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

b) For hvilke t har ligningssystemet

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= t + 1 \\ 3x + 6y + (3t^2 - \frac{15}{2})z &= 0 \end{aligned}$$

ingen løsning, nøyaktig en løsning, uendelig mange løsninger?

Oppgave 2

a) Gitt to komplekse tall z og w, la A være matrisen $A = \begin{bmatrix} z & w \\ -\overline{w} & \overline{z} \end{bmatrix}$, der $\overline{z}$ og $\overline{w}$ er kompleks konjugerte til hhv. z og w. Vis følgende påstand: Hvis matrisen A er forskjellig fra $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, så er determinanten til A et positivt reelt tall.

b) Skriv $1 - i$ på polarform og finn alle 3. røtter av $1 - i$.

Oppgave 3

a) Finn egenverdiene til matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$. Finn en matrise P slik at $P^{-1}AP = D$, der D er en diagonalmatrise.

b) Regn ut A^n når n er et positivt heltall.

c) Er matrisen A inverterbar? Vis at en inverterbar matrise har en entydig invers.

Oppgave 4

La $T_1 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ være projeksjonen ned på x-aksen og la $T_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ være rotasjonen $90°$ mot klokka. Beskriv T_1 og T_2 med standard matriser. Er $T_1 \circ T_2 = T_2 \circ T_1$?

Oppgave 5

Finn en ligning som beskriver planet som inneholder punktene $P_1(-1, 2, 5)$, $P_2(2, 1, 4)$ og $P_3(1, 1, 0)$.