NTNU
Institutt for matematiske fag

MA1201 LINEÆR ALGEBRA OG GEOMETRI

Semesterprøve – bokmål

Torsdag 11. oktober 2007
Tid: 12:15 – 13:45

Tillatte hjelpemidler: Ingen.

Prøven har to sider og har 12 oppgaver. Du skal sette *ett* kryss for hver oppgave på eget svarark. *Ikke* skriv på oppgavearket. Riktig svar er markert med rød tekst.

Oppgave 1

Hvilken av følgende matriser har ikke rad-trappeform?

A: $\begin{bmatrix} 1&0&0\\0&2&0\\0&0&3 \end{bmatrix}$ B: $\begin{bmatrix} 1&2&1\\0&1&0\\0&0&0 \end{bmatrix}$ C: $\begin{bmatrix} 1&2&1\\0&0&1\\1&0&1 \end{bmatrix}$ D: $\begin{bmatrix} 1&2&1\\0&0&1\\0&0&0 \end{bmatrix}$

Oppgave 2

Løsningen til ligningssystemet

$$\begin{matrix} x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & = & a \\ 2x_1 & + & 4x_2 & - & 3x_3 & = & b \\ 3x_1 & + & 6x_2 & - & 5x_3 & = & c \end{matrix}$$

er

A: $\begin{matrix} x_1 = & 2a+17b+11c \\ x_2 = & -a-11b+7c \\ x_3 = & 3b-2c \end{matrix}$ B: $\begin{matrix} x_1 = & 2a-17b-11c \\ x_2 = & -a+11b-7c \\ x_3 = & 3b+2c \end{matrix}$ C: $\begin{matrix} x_1 = & -2a+17b-11c \\ x_2 = & a+11b-7c \\ x_3 = & 3b+2c \end{matrix}$ D: $\begin{matrix} x_1 = & 2a-17b+11c \\ x_2 = & -a+11b-7c \\ x_3 = & 3b-2c \end{matrix}$

Oppgave 3

Bestem den reduserte rad-trappeformen til matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 8 & 4 & 18 \\ 0 & 0 & 5 & 10 & 0 & 15 \\ 2 & 6 & -5 & -2 & 4 & -3 \end{bmatrix}.$$

A: $\begin{bmatrix} 1&3&0&4&2&9\\0&0&1&2&0&9/2\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$ B: $\begin{bmatrix} 1&3&0&4&2&0\\0&0&1&2&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$ C: $\begin{bmatrix} 1&3&0&4&2&0\\0&0&1&2&0&0\\0&0&0&0&0&1\\0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}$ D: $\begin{bmatrix} 1&3&0&4&2&0\\0&0&1&2&0&0\\0&0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0&1 \end{bmatrix}$

Oppgave 4

Hva blir $(2X+3I)^T Y$ når $X = \begin{bmatrix} 3&2&1\\2&3&1\\1&1&3 \end{bmatrix}$ og $Y = \begin{bmatrix} 0&1&0\\1&0&0\\0&0&1 \end{bmatrix}$?

A: $\begin{bmatrix} 4&9&2\\9&4&2\\2&2&9 \end{bmatrix}$ B: $\begin{bmatrix} 9&4&2\\4&9&2\\2&2&9 \end{bmatrix}$ C: $\begin{bmatrix} 2&0&0\\0&3&0\\0&0&0 \end{bmatrix}$ D: Udefinert

Oppgave 5

Hva er determinanten til $\begin{bmatrix} 1&0&1&0\\1&1&0&1\\0&1&1&0\\1&0&0&1 \end{bmatrix}$?

A: 0 B: 1 C: 2 D: -1

Oppgave 6

La $Y = \begin{bmatrix} 1&2&3\\2&5&3\\1&0&8 \end{bmatrix}$. Vi skal finne matrisen X slik at $XY = I_3$. Svar:

A: $\begin{bmatrix} 2&5&3\\1&2&3\\1&0&8 \end{bmatrix}$ B: $\begin{bmatrix} 1&2&1\\2&5&0\\3&3&8 \end{bmatrix}$ C: Finnes ikke D: $\begin{bmatrix} -40&16&9\\13&-5&-3\\5&-2&-1 \end{bmatrix}$

Oppgave 7

La X og Y være to $(n \times n)$-matriser, og anta at X er inverterbar. Determinanten $\det(XYX^{-1})$ er lik:

$\boxed{\text{A:}}$ $\det Y$ $\boxed{\text{B:}}$ $\det X \cdot \det Y$ $\boxed{\text{C:}}$ 0 $\boxed{\text{D:}}$ $2 \det X + \det Y$

Oppgave 8

Hvilken matrise er ikke elementær?

$\boxed{\text{A:}}$ $\begin{bmatrix} 0&0&2&0 \\ 0&1&0&0 \\ 2&0&1&0 \\ 0&0&0&1 \end{bmatrix}$ $\boxed{\text{B:}}$ $\begin{bmatrix} 1&0&5 \\ 0&1&0 \\ 0&0&1 \end{bmatrix}$ $\boxed{\text{C:}}$ $\begin{bmatrix} 1&0&0 \\ 0&0&1 \\ 0&1&0 \end{bmatrix}$ $\boxed{\text{D:}}$ $\begin{bmatrix} 0&0&1 \\ 0&1&0 \\ 1&0&0 \end{bmatrix}$

Oppgave 9

Se på følgende liste av utsagn.

(1) Hvis jorden er flat, så er månen rund.
(2) 5 går opp i n hvis og bare hvis 5 går opp i n^3.
(3) Hvis $x < y$ så er $-x > -y$.
(4) La A være en $(n \times n)$-matrise, og b og x to n-dimensjonale kolonnematriser. Hvis $Ax = b$, så er $x = A^{-1}b$.
(5) Et lineært ligningssystem $Ax = b$, der $b \neq 0$, har alltid en løsning.
(6) Et lineært ligningssystem $Ax = 0$ har alltid en ikke-triviell løsning.
(7) La A være en kvadratisk matrise som oppfyller $A = AA^T$. Da er $\det A = (\det A)^2$.
(8) La A og B være to $(n \times n)$-matriser og anta at A kan reduseres til B ved hjelp av elementære radoperasjoner. Da er $\det A = \det B$.

Hvilke utsagn er sanne?

$\boxed{\text{A:}}$ 1, 3, 7 og 8 $\boxed{\text{B:}}$ 2, 3, 5 og 6 $\boxed{\text{C:}}$ 3, 4, 7 og 8 $\boxed{\text{D:}}$ 1, 2, 3 og 7

Oppgave 10

Hva er determinanten til matrisen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -5 & 12 & 4 \\ 3 & 11 & 0 & -9 & 6 \\ 4 & -14 & 51 & 0 & 8 \\ 5 & 31 & 2 & -2 & 10 \end{bmatrix}?$$

$\boxed{\text{A:}}$ 231964 $\boxed{\text{B:}}$ 0 $\boxed{\text{C:}}$ 2 $\boxed{\text{D:}}$ -268

Oppgave 11

La $A = \begin{bmatrix} 1&0&0&0 \\ 2&2&0&0 \\ 3&3&3&0 \\ 4&4&4&4 \end{bmatrix}$. Hva er egenverdiene til A?

$\boxed{\text{A:}}$ 4, 4, 4, 4 $\boxed{\text{B:}}$ 1, 1, 1, 24 $\boxed{\text{C:}}$ 0, 1, 2, 3 $\boxed{\text{D:}}$ 1, 2, 3, 4

Oppgave 12

La A og B være to invertible $(n \times n)$-matriser. Hvilket av de fire alternativene er lik matrisen $[(AB)^T(AB)A^{-1}]^{-1}$?

$\boxed{\text{A:}}$ $AB^{-1}A^{-1}(A^{-1})^T(B^{-1})^T$ $\boxed{\text{B:}}$ $(A^{-1})^T(B^{-1})^TA^{-1}B^{-1}A$

$\boxed{\text{C:}}$ $(A^T)^{-1}(B^T)^{-1}A^{-1}B^{-1}A$ $\boxed{\text{D:}}$ $AB^{-1}(A^T)^{-1}A^{-1}(B^{-1})^T$