Norges teknisk-
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

FASIT TIL SEMESTERPRØVE I MA1201 LINEÆR ALGEBRA OG GEOMETRI, HØSTEN 2008

Torsdag 16. oktober 2008
Tid: kl. 14.15 - 15.45

Oppgave 1

Den reduserte trappeform (the reduced row-echelon form) til matrisen:

$$\begin{bmatrix} 0 & 9 & -9 & -2 \\ 2 & 7 & -1 & -1 \\ 1 & 7 & -4 & -1 \end{bmatrix}$$

er:

$$\boxed{\text{D}} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Oppgave 2

Determinanten til matrisen

$$\begin{bmatrix} 0 & -3 & 0 & 1 \\ 6 & 0 & -2 & 2 \\ -1 & 7 & -13 & 0 \\ -3 & 0 & 5 & -1 \end{bmatrix}$$

er lik:

$\boxed{\text{B}}$ -192

Oppgave 3

Hvor mange løsninger har likningssystemet:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & 7y & + & 2z & = & 0 \\ 2x & + & \sqrt{2}y & - & 6z & = & 0 \\ -\ 6x & + & y & - & 4z & = & 0 \end{array}$$

$\boxed{\text{C}}$ Nøyaktig 1

Oppgave 4

La A og B være to matriser. Da gjelder følgende:

$\boxed{\text{D}}$ Hvis A er en $m \times n$-matrise og B en $n \times m$-matrise, så er både AB og BA definert.

Oppgave 5

Hvilken av følgende matriser er ***ikke*** en elementær-matrise:

$$\boxed{\text{A}} \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Oppgave 6

La A være en nedre triangulær $n \times n$-matrise. Hvilket av følgende utsagn er ***ikke*** korrekt:

$\boxed{\text{C}}$ A er alltid inverterbar.

Oppgave 7

a) Løs det homogene likningssystemet:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2x & + & 2y & + & 3z & = & 0 \\ 3x & + & 5y & + & 5z & = & 0 \\ x & + & 7y & + & 3z & = & 0 \end{array}$$

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix} t \quad , \; t \in \mathbb{R}$$

b) Bestem (hvis mulig) en vektor $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3) \neq \mathbf{0}$ som står vinkelrett på alle de tre vektorene: $\mathbf{a} = (2, 2, 3)$, $\mathbf{b} = (3, 5, 5)$, $\mathbf{c} = (1, 7, 3)$.

Ved å sette opp likningene $\mathbf{a} \cdot \mathbf{u} = 0$, $\mathbf{b} \cdot \mathbf{u} = 0$ og $\mathbf{c} \cdot \mathbf{u} = 0$ så får man nøayktig likningssystemet som ble løst i **a)**. Altså, ved å sette $t = 1$ i løsningen over får man $\mathbf{u} = (5, 1, -4)$.

Oppgave 8

I denne oppgaven kan du benytte følgende resultat:

Teorem. La A være en $n \times n$-matrise.

(i) Hvis B er en matrise som framkommer når en rad i A multipliseres med en konstant k, så vil $\det B = k \det A$.

(ii) Hvis B er en matrise som framkommer av A ved at to rader bytter plass, så er $\det A = -\det B$.

(Bevis for dette teorem kreves ikke!)

Bevis at hvis to rader i en matrise A er proporsjonale, så må $\det A = 0$.

Anta her at rad i og rad j er proporsjonale i A, dvs rad $i = k$·rad j for en $k \neq 0$. Fra punkt (i) i teoremet over får vi da $\det A = k \det B$, der B er matrisen som framkommer fra A når man ganger rad j med $\frac{1}{k}$. Nå har B to like rader, nemlig rad i og rad j og dersom man bytter om disse to radene får vi B igjen. Fra (ii) har vi da at $\det B = -\det B$, dette er kun mulig dersom $\det B = 0$. Vi får da at $\det A = k \det B = k \cdot 0 = 0$.

Oppgave 9

La A og B være $n \times n$-matriser. Bevis at dersom AB er inverterbar, så må både A og B være inverterbare.

Kontrapositivt argument:
Merk: A inverterbar hvis og bare hvis $\det A \neq 0$.
Anta at A ikke er inverterbar, dvs $\det A = 0$. Siden $\det(AB) = \det A \det B = 0$, kan ikke AB heller være inverterbar.
Direkte argument (1):
$0 \neq \det(AB) = \det A \det B$ hvis og bare hvis $\det A \neq 0 \neq \det B$.
Direkte argument (2):
Merk: En kvadratisk matrise som har en ensidig invers, har automatisk en tosidig invers. Dette er vist på forelesning.
Siden AB er inverterbar, har den en høyre invers: $I = (AB)C = A(BC)$ som betyr at A har en høyre invers. Vi har da at denne er en tosidig invers. Siden AB er inverterbar, har den en venstre invers: $I = C(AB) = (CA)B$ som betyr at B har en venstre invers. Vi har da at denne er en tosidig invers.