Oppgåve 1

Gå ut i frå at A er ei 2×2 matrise og at A^{-1} er gitt ved:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Då er A lik

$$\boxed{A} \quad \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boxed{B} \quad \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boxed{C} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\boxed{D} \quad \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}, \quad \boxed{E} \quad \frac{1}{13}\begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

Velkjent formel for invers av 2×2-matriser,

og $(A^{-1})^{-1} = A$

Oppgåve 2

Gitt det lineære likningssystemet:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 2y & - & z & = & -15 \\ 5x & + & 3y & + & 2z & = & 0 \\ 3x & + & y & + & 3z & = & 11 \\ -6x & - & 4y & + & 2z & = & 30 \end{array} \quad 2$$

gir

Då er den reduserte trappeforma for totalmatrisa (the augmented matrix):

etter litt regning.

$$\boxed{A} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right], \quad \boxed{B} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right], \quad \boxed{C} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right],$$

$$\boxed{D} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 45 \\ 0 & 1 & -11 & 40 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right], \quad \boxed{E} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$$

Oppgåve 3

Lat A, B og C vere $n \times n$-matriser. Då gjeld:

- [A] Dersom $AB = AC$, så er $B = C$.
- [B] Dersom A er inverterbar, så er $AB = AC$.
- [C] Dersom A er inverterbar og $BA = CA$, så er $B = C$.
- [D] For alle $n \times n$-matriser A og B gjeld $(AB)^T = A^T B^T$.
- [E] Dersom $\det(A) = 0$, så er A inverterbar.

A^{-1} eksisterer

$BA = CA \Rightarrow (BA)A^{-1} = (CA)A^{-1} \Rightarrow B(AA^{-1}) = C(AA^{-1})$

$\Rightarrow BI = CI \Rightarrow B = C$

(Merkelig nok tror noen at $\boxed{A}$ er rett – uten å innse at da må også $\boxed{C}$ være rett! På forsiden står det jo at bare et svar er riktig på de fire første oppgavene!)

Oppgåve 4

Dersom matrisa

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 3 \\ -5 & 5 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

så er $\det(A)$ lik:

[A] 0, [B] 27, [C] -13, [D] 2, [E] 161.

Innsees lettest slik:
Summen av 1. rekke og 2. rekke er lik 3. rekke. Altså er $\det(A) = 0$.

Oppgåve 5

Noen overser dette!!

Løys likningssystemet:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ x & - & y & & & = & 0 \\ 2x & & & + & z & = & 3 \end{array}$$

Kor mange løysingar har dette likningssystemet?

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{c} 1 \\ \hookleftarrow \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -1 \\ \hookleftarrow \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} -2 \\ \hookleftarrow \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -\frac{1}{2} \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \hookleftarrow \\ -1 \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad \left.\begin{array}{l} x = \frac{3}{2} - \frac{t}{2} \\ y = \frac{3}{2} - \frac{t}{2} \\ z = t \end{array}\right\} t \in \mathbb{R}$$

Siden t kan velges fritt, har ligningssystemt uendelig mange lösningen.

<u>RÅD:</u> Fullför Gauss-Jordan-prosessen.

- Noen stopper etter 2 eller 3 trinn. – og hevder da at systemt har uendelig mange lösninger fordi vi har en rad med bare nuller. Holder dette alltid?
- Man får nokså urydelig form på lösningen om man ikke fullförer.

Oppgave 6

a) Bestem A^{-1} når $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]{-2} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right]{-2 \;\; 4} \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -6 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 11 & -2 & 4 & 1 \end{array}\right]\frac{1}{11}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -6 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{11} & \frac{4}{11} & \frac{1}{11} \end{array}\right] 6 \;\; -3 \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{1}{11} & \frac{2}{11} & \frac{6}{11} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{6}{11} & -\frac{1}{11} & -\frac{3}{11} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{11} & \frac{4}{11} & \frac{1}{11} \end{array}\right]$$

$$A^{-1} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 6 & -1 & -3 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Noen benytter formelen

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \operatorname{adj} A .$$

Dette gir vanligvis vanskeligere regning — og de fleste som har brukt denne metode regner feil!

b) Benytt sammenhengen $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ for å løse likningssystemet

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & & & = & 4 \\ & & y & + & 3z & = & 1 \\ 2x & & & - & z & = & 0 \end{array}$$

$$A\mathbb{x} = \mathbb{b} \quad \text{der} \quad \mathbb{b} = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbb{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = A^{-1}\mathbb{b} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 6 & -1 & -3 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} -2 \\ 23 \\ -4 \end{bmatrix} \qquad \begin{array}{l} x_1 = \frac{-2}{11} \\ x_2 = \frac{23}{11} \\ x_3 = -\frac{4}{11} \end{array}$$

Bestemt i (a)

c) Benytt Cramers regel for å løse likningsystemet i **b**).

$$|A| = \left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right| = (-1+12+0)-(0+0+0) = 11$$

$$|A_1| = \left|\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 2 & 0 & 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right| = (-4+0+0)-(0-2+0) = \underline{-2}$$

$$|A_2| = \left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right| = (-1+24+0)-(0+0+0) = \underline{23}$$

$$|A_3| = \left|\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 4 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \end{array}\right| = (0+4+0) - (0+0+8) = \underline{-4}$$

$$x = \frac{|A_1|}{|A|} = \frac{-2}{11}, \quad y = \frac{|A_2|}{|A|} = \frac{23}{11}, \quad z = \frac{|A_3|}{|A|} = \frac{-4}{11}$$

Hva om man får et svar her forskjellig fra det man fikk i (b)? Man bör da nevne at det må være en regnefeil enten i (b) eller (c) – slik at det ikke virker som man tror man kan få forskjellige lösninger ved å benytte forskjellige metoder. Ellers er det jo lett å kontrollere hva som er feil ved å sette inn lösningene i ligningssystemet til slutt.

Oppgave 7

Vis at

$$\det\left(\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

er likningen for en rett linje i planet $\mathbb{R}^2$, og at punktene $(1,2)$ og $(0,1)$ ligger på denne linjen.

$$x(2-1) - y(1-0) + 1(1) = 0$$

$$x - y + 1 = 0$$

er ligningen for en rett linje

$1 - 2 + 1 = 0$ Punktene ligger på

$0 - 1 + 1 = 0$ linjen.

(Det siste innsees direkte ved å sette inn $(x,y) = (1,2)$ og $(x,y) = 01$ og få to like linjer i determinanten.)

(Noen tror tydeligvis at

$x - y + 1$

er ligningen for en rett linje.

Noen tror at vi her får ligningen for en linje i rommet $\mathbb{R}^3$.)

Oppgave 8

a) Vis at når $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, så er $A^2 = 0$ (nullmatrisen).

$$AA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Bör man ha med litt mer av utregningen her?

b) Regn ut A^2 og A^3 når $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

Her bör også mellomregning antydes for ordens skyld.

(Noen synes å ha glemt hvordan man multipliserer to matriser – og skriver f.eks.

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 0^2 & 0^2 & 0^2 \\ 1^2 & 0^2 & 0^2 \\ 1^2 & 1^2 & 0^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$)

c) La A være en $n \times n$-matrise slik at $A^k = 0$ for et naturlig tall k. Bevis at da er A ikke inverterbar.

$$0 = \det(A^k) = (\det A)^k \Rightarrow \det A = 0$$
$$\Downarrow$$
A er ikke inverterbar.

Må huske disse:

SENTRALE TEOREM I PENSUM:

(1) $\det(AB) = (\det A)(\det B)$

(2) $\det A \neq 0 \Leftrightarrow A$ er invertibel

(Her er mange rare feil - og mange blanke. En god del påstår igjen at $A^k = 0 \Rightarrow A = 0$, til tross for moteksemplene i (b).)

ALTERNATIVT BEVIS (Reductio ad absurdum!)

Anta at $A^k = 0$ og samtidig at A er invertibel. Vi har da

$$0 = A^k \Rightarrow 0 = 0(A^{-1})^k = A^k(A^{-1})^k = A^k(A^k)^{-1} = I$$

Men $0 \neq I$, så antagelsen om at A^{-1} eksisterer må forkastes.

KANDIDATNR.:

d) Anta at A er en kvadratisk matrise og at $A^4 = 0$. Bevis at da er $(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3$, der I er identitetsmatrisen.

$$\underline{(I-A)(I+A+A^2+A^3)} = (I + \cancel{A} + \cancel{A^2} + \cancel{A^3}) - (\cancel{A} + \cancel{A^2} + \cancel{A^3} + A^4)$$

$$= I - A^4 = \underline{I} \quad \text{fordi } A^4 = 0$$

Altså er $I + A + A^2 + A^3$ høyre-invers til $I - A$.

MÅ SIES! Fra teorien vet vi da at den også er venstre-invers. Altså:

$$I + A + A^2 + A^3 = (I-A)^{-1}$$

$\boxed{\text{Mye rart m.h.t. logikken her!}}$

(Her var det mye rot i logikken! Man kan ikke starte med det man skal fram til, nemlig at

$$(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3$$

- for så å utlede at $I = I$.

Det vi skal bevise her er:

$$A^4 = 0$$
$$\Downarrow$$
$$(I-A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3.)$$

Oppgåve 9

For kva verdiar av α har følgjande likningssystem inga løysing? Nøyaktig ei løysing? Uendeleg mange løysingar?

$$\begin{aligned} 3x &- 2y &+z &= 1 \\ -x &+ y &-\alpha z &= 0 \\ 2x &- y &+(\alpha-1)^2 z &= \alpha \end{aligned}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -\alpha & 0 \\ 2 & -1 & (\alpha-1)^2 & \alpha \end{array}\right] \begin{array}{c} 1 \\ \leftarrow \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & (1-\alpha) & 1 \\ 2 & -1 & (1-\alpha)^2 & \alpha \end{array}\right] \begin{array}{c} \\ -1 \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & (1-\alpha) & 1 \\ 0 & 0 & * & \alpha-1 \end{array}\right]$$

der $*$ er lik

$$(1-\alpha)^2-(1-\alpha) = (1-\alpha)(1-\alpha-1) = (1-\alpha)(-\alpha) = \alpha(\alpha-1)$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & (1-\alpha) & 1 \\ 0 & 0 & \alpha(\alpha-1) & \alpha-1 \end{array}\right]$$

$\underline{\alpha \neq 0 \text{ og } \alpha \neq 1}$ (begge disse antagelser benyttes nedenfor!!)

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & (1-\alpha) & 1 \\ 0 & 0 & \alpha & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} -\frac{2}{3} \\ \leftarrow \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & (\frac{1}{3}-\alpha) & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{\alpha} \end{array}\right]$$

Determinanten:

$$\begin{vmatrix} 3 & \bullet & \bullet \\ 0 & \frac{1}{3} & \bullet \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

Altså har systemet eksakt $\underline{\text{en}}$ lösning.

$\underline{\alpha = 0}$:

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right]$$

Systemet er inkonsistent – $\underline{\text{ingen}}$ lösning.

$\underline{\alpha = 1}$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} -\frac{2}{3} \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \frac{1}{3} \\ 3 \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{c} \leftarrow \\ \frac{2}{3} \\ \end{array}$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\left.\begin{aligned} x &= 1 + t \\ y &= 1 + 2t \\ z &= t \end{aligned}\right\} t \in \mathbb{R}$$

$\underline{\text{Uendelig mange lösninger.}}$