Norges teknisk-
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

KANDIDAT NR.:

SEMESTERPRØVE I MA1201 LINEÆR ALGEBRA OG GEOMETRI, HAUSTEN 2009

Fagleg kontakt: Per Hag
Telefon: (735) 91743

Tysdag 20. oktober 2009
Tid: kl. 12.15 - 13.45
Nynorsk

Tilletne hjelpemiddel: Ingen trykte eller handskrivne hjelpemiddel tilletne. Bestemt enkel kalkulator (HP30S eller CITIZEN SR-270X) tillatt.

Prøven er på **12** sider fordelt på **6** ark og har to delar. Oppgåvene 1 til 4 er fleirvalsoppgåver. I fleirvalsdelen har kvar oppgåve fem mogelege svar og berre eit av desse er rett. Kryss av ved dette alternativet. I oppgåvene 5 til 9 skal mellomrekning/grunngjeving vere med i svara. Kvart punkt har same vekt ved vurderinga. Svara skal skrivast på desse sidene. Kandidatnummeret skal skrivast på **kvart** ark.

Lukke til!

Oppgåve 1

Gå ut i frå at A er ei 2×2 matrise og at A^{-1} er gitt ved:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Då er A lik

$\boxed{\text{A}}$ $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$, $\boxed{\text{B}}$ $\dfrac{1}{13}\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$, $\boxed{\text{C}}$ $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$,

$\boxed{\text{D}}$ $\dfrac{1}{13}\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $\boxed{\text{E}}$ $\dfrac{1}{13}\begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

Oppgåve 2

Gitt det lineære likningssystemet:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 2y & - & z & = & -15 \\ 5x & + & 3y & + & 2z & = & 0 \\ 3x & + & y & + & 3z & = & 11 \\ -6x & - & 4y & + & 2z & = & 30 \end{array}$$

Då er den reduserte trappeforma for totalmatrisa (the augmented matrix):

$\boxed{\text{A}}$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right]$, $\boxed{\text{B}}$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right]$, $\boxed{\text{C}}$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$,

$\boxed{\text{D}}$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 45 \\ 0 & 1 & -11 & 40 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right]$, $\boxed{\text{E}}$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{array}\right]$

Oppgåve 3

Lat A, B og C vere $n \times n$-matriser. Då gjeld:

$\boxed{\text{A}}$ Dersom $AB = AC$, så er $B = C$.

$\boxed{\text{B}}$ Dersom A er inverterbar, så er $AB = AC$.

$\boxed{\text{C}}$ Dersom A er inverterbar og $BA = CA$, så er $B = C$.

$\boxed{\text{D}}$ For alle $n \times n$-matriser A og B gjeld $(AB)^T = A^T B^T$.

$\boxed{\text{E}}$ Dersom $\det(A) = 0$, så er A inverterbar.

Oppgåve 4

Dersom matrisa

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 3 \\ -5 & 5 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

så er $\det(A)$ lik:

$\boxed{\text{A}}$ 0, $\boxed{\text{B}}$ 27, $\boxed{\text{C}}$ -13, $\boxed{\text{D}}$ 2, $\boxed{\text{E}}$ 161.

Oppgåve 5

Løys likningssystemet:

$$\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & z & = & 3 \\ x & - & y & & & = & 0 \\ 2x & & & + & z & = & 3 \end{array}$$

Kor mange løysingar har dette likningssystemet?

Oppgåve 6

a) Finn A^{-1} når $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

b) Bruk samanhengen $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ for å løyse likningssystemet

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & & & = & 4 \\ & & y & + & 3z & = & 1 \\ 2x & & & - & z & = & 0 \end{array}$$

c) Bruk Cramers regel for å løyse likningsystemet i **b)**.

Oppgåve 7

Vis at

$$\det\left(\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

er likninga for ei rett linje i planet $\mathbb{R}^2$, og at punkta $(1,2)$ og $(0,1)$ ligg på denne linja.

Oppgåve 8

a) Vis at når $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, så er $A^2 = 0$ (nullmatrisa).

b) Rekn ut A^2 og A^3 når $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

c) Lat A vere ei $n \times n$-matrise slik at $A^k = 0$ for eit naturleg tall k. Vis at då er A ikkje inverterbar.

d) Gå ut i frå at A er ei kvadratisk matrise og at $A^4 = 0$. Vis at då er $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3$, der I er identitetsmatrisa.

Oppgåve 9

For kva verdiar av α har følgjande likningssystem inga løysing? Nøyaktig ei løysing? Uendeleg mange løysingar?

$$
\begin{array}{rcrrcl}
3x & - & 2y & +z & = & 1 \\
-x & + & y & -\alpha z & = & 0 \\
2x & - & y & +(\alpha-1)^2 z & = & \alpha
\end{array}
$$