Norges teknisk-
naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematiske fag

FASIT TIL SEMESTERPRØVE I MA1201, HØSTEN 2009

Oppgave 1

Anta at A er en 2×2-matrise og at A^{-1} er gitt ved:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}.$$

Da er A lik

$$\boxed{\text{B}} \quad \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$$

Oppgave 2

Gitt det lineære likningssystemet:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 2y & - & z & = & -15 \\ 5x & + & 3y & + & 2z & = & 0 \\ 3x & + & y & + & 3z & = & 11 \\ -6x & - & 4y & + & 2z & = & 30 \end{array}$$

Da er den reduserte trappeform for totalmatrisen (the augmented matrix):

$$\boxed{\text{C}} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Oppgave 3

La A, B og C være $n \times n$-matriser. Da gjelder:

$\boxed{\text{C}}$ Hvis A er inverterbar og $BA = CA$, så er $B = C$.

Oppgave 4

Hvis matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -2 & 3 \\ -5 & 5 & 1 & -1 \end{bmatrix},$$

så er $\det(A)$ lik:

$\boxed{\text{A}}$ 0.

Oppgave 5

Løs likningssystemet:

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & + & z & = & 3 \\ x & - & y & & & = & 0 \\ 2x & & & + & z & = & 3 \end{array}$$

Hvor mange løsninger har dette likningssystemet?

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \cdots \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Løsning:

$$\begin{array}{rcl} x & = & \frac{3-t}{2} \\ y & = & \frac{3-t}{2} \\ z & = & t \end{array}$$

for $t \in \mathbb{R}$. Altså vi får uendelig mange løsninger.

Oppgave 6

a) Bestem A^{-1} når $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

$$A^{-1} = \frac{1}{11} \begin{bmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 6 & -1 & -3 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Benytt sammenhengen $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$ for å løse likningssystemet

$$\begin{array}{rcrcrcl} x & + & 2y & & & = & 4 \\ & & y & + & 3z & = & 1 \\ 2x & & & - & z & = & 0 \end{array}$$

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} -1 & 2 & 6 \\ 6 & -1 & -3 \\ -2 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} -2 \\ 23 \\ -4 \end{bmatrix}$$

c) Benytt Cramers regel for å løse likningsystemet i **b)**.

$$x = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} / \det(A) = -\frac{2}{11},$$

$$y = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} / \det(A) = \frac{23}{11},$$

$$z = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} / \det(A) = -\frac{4}{11}.$$

Oppgave 7

Vis at

$$\det\left(\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 0$$

er likningen for en rett linje i planet $\mathbb{R}^2$, og at punktene $(1,2)$ og $(0,1)$ ligger på denne linjen.

Likningen blir av formen $Ax + By + C = 0$ der $(A,B) \neq (0,0)$. Derfor blir dette likningen for en rett linje i planet. Innsetting av $x = 1,\ y = 2$ eller av $x = 0,\ y = 1$ gir to like rader og likningen er derfor oppfylt for disse to punktene.

Oppgave 8

a) Vis at når $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, så er $A^2 = 0$ (nullmatrisen).

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

b) Regn ut A^2 og A^3 når $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$A^3 = A^2 A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

c) La A være en $n \times n$-matrise slik at $A^k = 0$ for et naturlig tall k. Bevis at da er A ikke inverterbar.

Multiplikasjonsetningen for determinanter gir

$$0 = \det(A^k) = (\det(A))^k$$

Altså er $\det(A) = 0$. Følgelig er A ikke inverterbar.

d) Anta at $A^4 = 0$. Bevis at da vil $(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3$, der I er identitetsmatrisen.

Vi har:

$$(I - A)(I + A + A^2 + A^3) = I + A + A^2 + A^3 - (A + A^2 + A^3 + A^4) = I - A^4 = I.$$

Altså har vi at $I + A + A^2 + A^3$ er høyreinvers til $I - A$, og dermed inversen til $I - A$.

Oppgave 9

For hvilke verdier α har følgende likningssystem ingen løsning? Nøyaktig en løsning? Uendelig mange løsninger?

$$\begin{array}{rcrrcl} 3x & - & 2y & +z & = & 1 \\ -x & + & y & -\alpha z & = & 0 \\ 2x & - & y & +(\alpha-1)^2 z & = & \alpha \end{array}$$

Ved å utføre to radoperasjoner på totalmatrisen får vi følgende matrise:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 3 & -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -\alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha(\alpha-1) & \alpha - 1 \end{array}\right]$$

Her kan vi se at uansett valg av α så vil de to øverste radene aldri bli proporsjonale, dvs. et skalarmultiplum av den andre. Dersom $\alpha = 0$ får vi ingen løsning da siste rad svarer til likning av formen $0z = -1$. Dersom $\alpha = 1$ får vi uendelig mange løsninger da vi får (kun) en fri variabel. For alle andre verdier av α vil det være nøyaktig en løsning.