BEVIS FOR TEOREMENE PÅ S. (K):

T.2.0.1 (a) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{(x_1+x_2) + i(y_1+y_2)} = (x_1+x_2) - i(y_1+y_2)$
$= (x_1 - iy_1) + (x_2 - iy_2) = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$

(b) Overlates til selvstudium.

(c) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(x_1+iy_1)(x_2+iy_2)} = \overline{(x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)}$
$= (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1)$
$\bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 = (x_1 - iy_1)\cdot(x_2 - iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2 + x_2y_1)$
$= \overline{z_1 \cdot z_2}$

(d) Overlates til selvstudium.

(e) $\bar{\bar{z}} = \overline{x - iy} = x + iy = z$

(f) $z = \bar{z} \iff x + iy = x - iy \iff y = 0.$
d.v.s $z \in \mathbb{R}$.

BEVIS FOR DET SISTE TEOREMET:

Vi antar altså at $z = z_0$ er en rot i ligningen:

$$a_0 z^m + a_1 z^{m-1} + a_2 z^{m-2} + \dots + a_m = 0$$

der $a_0, a_1, a_2, \dots, a_m \in \mathbb{R}$. D.v.s. at:

$$a_0 z_0^m + a_1 z_0^{m-1} + a_2 z_0^{m-2} + \dots + a_m = 0$$

Konjugeres begge sider av likheten gjelder fortsatt likheten:

$$\overline{a_0 z_0^m + a_1 z_0^{m-1} + a_2 z_0^{m-2} + \dots + a_m} = \bar{0} = 0$$

Ut fra punkt (a) i Teorem.2.0.1 ovenfor følger det lett at:

$$\overline{a_0 z_0^m} + \overline{a_1 z_0^{m-1}} + \overline{a_2 z_0^{m-2}} + \dots + \bar{a}_m = 0$$

Fra (c) i samme teorem følger lett:

$$\bar{a}_0 \bar{z}_0^m + \bar{a}_1 \bar{z}_0^{m-1} + \bar{a}_2 \bar{z}_0^{m-2} + \dots + \bar{a}_m = 0$$

Siden $\bar{a}_0 = a_0$, $\bar{a}_1 = a_1$, ..., $\bar{a}_m = a_m$

har vi da:

$$a_0\bar{z}_0^{\,n} + a_1\bar{z}_0^{\,n-1} + a_2\bar{z}_0^{\,n-2} + \cdots + a_n = 0$$

Altså er $z = \bar{z}_0$ også rot i ligningen. □

MERKNAD:

Hvis vi har en 2. gradsligning

$$ax^2 + bx + c = 0$$

der koeffisientene a, b, c er reelle, kan vi finne röttene fra formelen:

$$x_i = \frac{1}{2a}\left[-b \pm \sqrt{b^2-4ac}\right] \quad , \quad i = 1, 2 .$$

Hvis $b^2 - 4ac < 0$ kan vi omskrive dette til:

$$\left.\begin{matrix} z_1 \\ z_2 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{2a}\left[-b \pm i\sqrt{4ac-b^2}\right]$$

der $\sqrt{4ac-b^2}$ er reell. Altså er de to röttene komplekst konjugerte.

Ser vi derimot på ligningen:

$$z^2 + 2iz - 1 = 0$$

kan denne omskrives til

$$(z+i)^2 = 0 .$$

Denne ligningen har dobbelroten

$$z_1 = z_2 = -i .$$

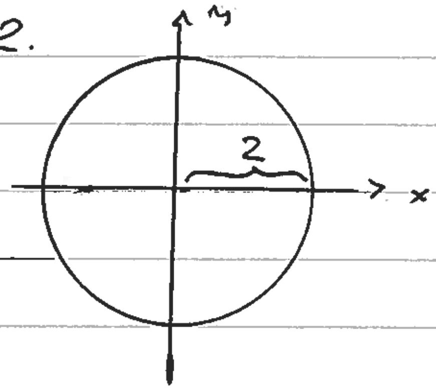
Altså har den ikke to komplekst konjugerte rötter. Men vi observerte straks at denne ligning ikke har koeffisienter som er reelle.

OPPGAVE 17, s532 (9. UTG):

Vi skal bestemme de punktmengder i det komplekse planet $\mathbb{C}$ bestemt ved fölgende uttrykk:

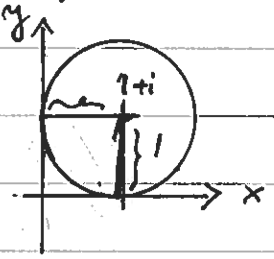
(N)

(a) $|z| = 2$; $x^2 + y^2 = 4$ Sirkel med sentrum i origo og radius = 2.



(b) $|z - (1+i)| = 1$

Avstanden mellom z og punktet $z_0 = 1+i$ er lik 1



Kan også regne slik: $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$

(c) $|z - i| = |z + i|$. z har samme avstand fra i som fra $-i$. Må bli x-aksen (den reelle akse)

$$|x + i(y-1)|^2 = |x + i(y+1)|^2$$

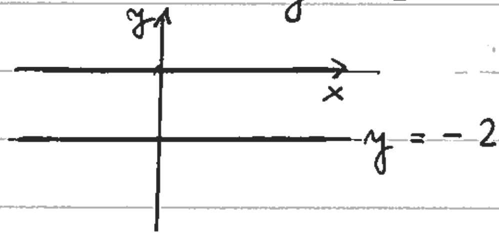
$$x^2 + (y-1)^2 = x^2 + (y+1)^2$$

$$|y-1| = |y+1| \quad \text{Må ha } y = 0.$$

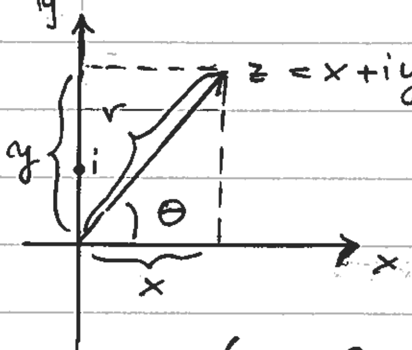
(d) $\mathrm{Im}(\bar{z} + i) = 3$

$\Leftrightarrow \mathrm{Im}(x + (1-y)i) = 3 \Leftrightarrow 1 - y = 3$

$\Leftrightarrow y = -2$



10.3 Polarkoordinat-representasjon av komplekse tall.



Vi har følgende $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$

Dette gir:

$$z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta$$

$= r(\cos\theta + i\sin\theta)$. Dette kalles polarkoordinat-representasjonen til z.

La så $z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ og $z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$. Vi har da:

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$$
$$= r_1 \cdot r_2((\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2$$
$$= r_1 \cdot r_2(\cos(\theta_1+\theta_2) + i\sin(\theta_1+\theta_2)).$$

Siste trinnet bygger på formler som forhåpentligvis er velkjente fra trigonometrien på v.g.s.

MERKNAD:

Fra vårt utgangspunkt er det ovenstående velkjent: Produktet av z_1 og z_2 oppnåes ved å multiplisere sammen lengdene (modulene) og addere sammen vinklene (argumentene). Fra bokens utgangspunkt er dette et teorem!

Vårt utgangspunkt ga også z_1/z_2 når $z_2 \neq 0$ nokså direkte:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\theta_1-\theta_2) + i\sin(\theta_1-\theta_2))$$

Dette er fra bokens utgangspunkt nå en konsekvens av ovennevnte teorem.

De Moivres formel:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

BEVIS:

Formelen er triviell for $n = 1$.

Anta at vi har:

(P)

NB! $r=1$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^k = \cos k\theta + i\sin k\theta$$

Vi har da videre:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{k+1} = (\cos\theta + i\sin\theta)^k \cdot (\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\overset{IH}{=} (\cos k\theta + i\sin k\theta)\cdot(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$= \cos(k\theta + \theta) + i\sin(k\theta + \theta) =$$

$$\cos((k+1)\theta) + i\sin((k+1)\theta)$$

Altså gjelder De Moivres formel for hvert naturlig tall n. □

Denne formel gir oss noen identiteter som kan være nyttige f.eks. når det gjelder å regne ubestemte integraler. Vi skal f.eks. se på:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^2 = \cos 2\theta + i\sin 2\theta.$$

Regner vi ut det uttrykket vi har på venstre siden slik vi er vant til fra v.g.s. – og selvsagt husker at $i^2 = -1$, får vi:

$$\cos^2\theta + 2i\cos\theta\sin\theta - \sin^2\theta$$

$$= \cos 2\theta + i\sin 2\theta.$$

Dette gir når vi ser på realdelene på begge sider av likhetstegnet:

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$

Når vi setter likhetstegn mellom imaginærdelene får vi:

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta.$$

$(\cos\theta + i\sin\theta)^3 = \cos^3\theta + 3i\cos^2\theta\sin\theta$
$- 3\cos\theta\sin^2\theta - i\sin^3\theta$ (NB! $i^3 = -i$)

Dette gir formlene:

$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta$

$\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta.$

(Legg merke til (9. UTGAVE) boken notis på s. 537 om De Moivre. Han levde fra 1667-1754, men regnet altså med komplekse tall. Det merkelige var at han beviste ovenstående formel lenge før Caspar Wessel, C.F. Gauss og J. Argand introduserte det komplekse plan.)

OPPGAVE 6(a), s. 539: (9. UTG.)

Vi skal benytte ovenstående formler til å bestemme $(1+i)^{12}$

Vi har da $1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$(1+i)^{12} = (\sqrt{2})^{12}\left(\cos\frac{12\pi}{4} + i\sin\frac{12\pi}{4}\right)$

$= 2^6(\cos 3\pi + i\sin 3\pi) = 2^6(-1 + i0) = -2^6$

$= \underline{\underline{-64}}$

OPPGAVE 12, s. 539: (9. UTG)

Vi skal finne alle røtter i ligningen: $z^4 + 8 = 0$ eller

$z^4 = -8 = 8(\cos\pi + i\sin\pi)$

$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ $z^4 = r^4(\cos 4\theta + i\sin 4\theta)$

Må da ha: $r^4 = 8$; $r = \sqrt[4]{8}$

$\cos 4\theta = \cos\pi$, $\sin 4\theta = \sin\pi$

$\theta_1 = \frac{\pi}{4}$, $\theta_2 = \frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{4}$, $\theta_3 = \frac{\pi}{4} + \frac{4\pi}{4}$, $\theta_4 = \frac{\pi}{4} + \frac{6\pi}{4}$

®

eller: $\Theta_1 = \frac{\pi}{4}$, $\Theta_2 = \frac{3\pi}{4}$, $\Theta_3 = \frac{5\pi}{4}$, $\Theta_4 = \frac{7\pi}{4}$ NB!

$\frac{9\pi}{4} = \frac{8\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = 2\pi + \frac{\pi}{4}$

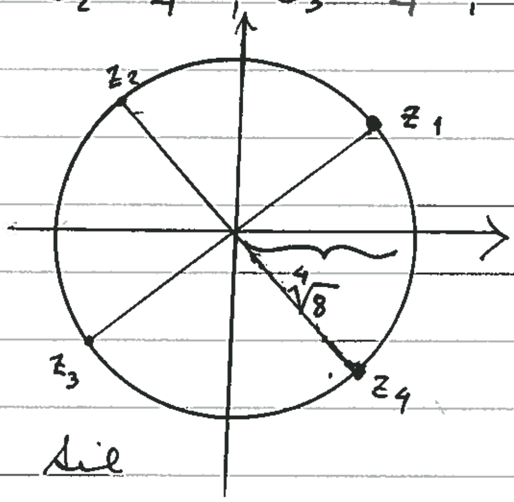
Sirkeldelingsligningen.

$z_1 = \sqrt[4]{8}(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4})$
$= \sqrt[4]{8}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}}\right)$
$= \sqrt[4]{2}(1+i)$

$z_2 = \sqrt[4]{2}(-1+i)$

$z_3 = \sqrt[4]{2}(-1-i)$

$z_4 = \sqrt[4]{2}(1-i)$



Legg merke til at $z_4 = \bar{z}_1$ og $z_3 = \bar{z}_2$ – slik vi viste mer generelt tidligere når ligningen vi startet med har reelle koeffisienter: $z^4 + 8 = 0$.

Vi har da:

$(z - z_1)(z - z_4)(z - z_2)(z - z_3) =$
$(z - \sqrt[4]{2}(1+i))(z - \sqrt[4]{2}(1-i))(z - \sqrt[4]{2}(-1+i))(z - \sqrt[4]{2}(-1-i))$
$= \underline{(z^2 - 2\sqrt[4]{2}\,z + 2\sqrt{2})(z^2 + 2\sqrt[4]{2}\,z + 2\sqrt{2})}$

(Kan her benytte at $z + \bar{z} = 2x = 2\mathrm{Re}\,z$
$z \cdot \bar{z} = |z|^2 = x^2 + y^2$.)

Boken introduserer så:
$$e^{i\Theta} = \cos\Theta + i\sin\Theta.$$

(Eulers formel) Hvorfor? Fordi:

$\underline{e^{i(\Theta_1+\Theta_2)}} = \cos(\Theta_1 + \Theta_2) + i\sin(\Theta_1 + \Theta_2)$
$= (\cos\Theta_1 + i\sin\Theta_1)\cdot(\cos\Theta_2 + i\sin\Theta_2)$
$= \underline{e^{i\Theta_1} \cdot e^{i\Theta_2}}$

$\underline{e^{i0}} = \cos 0 + i\sin 0 = \underline{1}$

Husk regnereglene for reelle eksponensial-uttrykk: $e^{a+b} = e^a \cdot e^b$ og
$e^0 = 1$

NB! $e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - \frac{ix^3}{3} + \frac{x^4}{4!} + \dots$

Polynomfaktorisering:

Vi har følgende resultat for polynomer med reelle koeffisienter. Et polynom
$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n$
der $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ kan faktoriseres med til 1. grads og 2. grads polynomer med reelle koeffisienter; d.v.s.:
$P(z) \equiv a_0 (z - z_1)^{m_1} (z - z_2)^{m_2} \cdots (z^2 + p_1 z + q_1)^{l_1} \cdots (z^2 + p_i z + q_i)^{l_i}$
der alle koeffisienter $z_1, z_2, \ldots p_1, q_1, \ldots p_i, q_i$ er reelle. Dette innsees lett fra algebraens fundamentalteorem og det faktum at komplekse røtter forekommer i par og med samme multiplisitet.

NB! Dette resultat er helt sentralt når man skal beregne integral av rasjonale funksjoner!

EKSEMPEL:

$P(z) = z^3 + 3z^2 + 5z + 3$

Hvordan kan dette faktoriseres slik vi har beskrevet ovenfor?

Ser at $P(-1) = -1 + 3 - 5 + 3 = 0$

Altså er $z_1 = -1$ en reell rot i polynomet.

Da skal følgende divisjon gå opp:

$$(z^3 + 3z^2 + 5z + 3) : (z+1) = z^2 + 2z + 3$$
$$\begin{array}{l} -(z^3 + z^2) \\ \hline \quad 2z^2 + 5z \\ \quad -(2z^2 + 2z) \\ \hline \qquad 3z + 3 \\ \qquad -(3z + 3) \\ \hline \end{array}$$

Altså: $P(z) \equiv (z+1)(z^2 + 2z + 3)$

$z^2 + 2z + 3 = 0$ har ingen reelle røtter: $z_1 = -1 + i\sqrt{2}$, $z_2 = -1 - i\sqrt{2}$

ALGEBRAENS FUNDAMENTAL-TEOREM:

Ethvert polynom $p(z)$ der:

$$p(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_{n-1} z + a_n \quad ; \; n \geq 1,$$

der $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ har minst et komplekst nullpunkt; d.v.s. $p(z_0) = 0$.

(Bevist av C.F. Gauss i 1799)

KOROLLAR:

Ethvert polynom av grad ≥ 1 med reelle koeffisienter kan faktoriseres i reelle 1. og 2. grads-faktorer:

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = a_0 (x - x_1)^{\alpha_1} \cdots (x - x_k)^{\alpha_k} (x^2 + b_1 x + c_1)^{\beta_1} \cdots (x^2 + b_t x + c_t)^{\beta_t}$$

VIKTIG ANVENDELSE:

Delbrøkoppspalting av rasjonale funksjoner for å kunne regne ut integraler av typen:

$$\int \frac{p(x)}{q(x)}\, dx$$

der p og q er polynomer med reelle koeffisienter.