NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i
MA1201/MA6201 Lineær algebra og geometri

Faglig kontakt under prøven: Øyvind Solberg

Tlf: 7359 1748

Dato for prøven: 14. desember 2015

Prøvetid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D: Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 3

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1

a) Løs det homogene ligningssystemet gitt ved

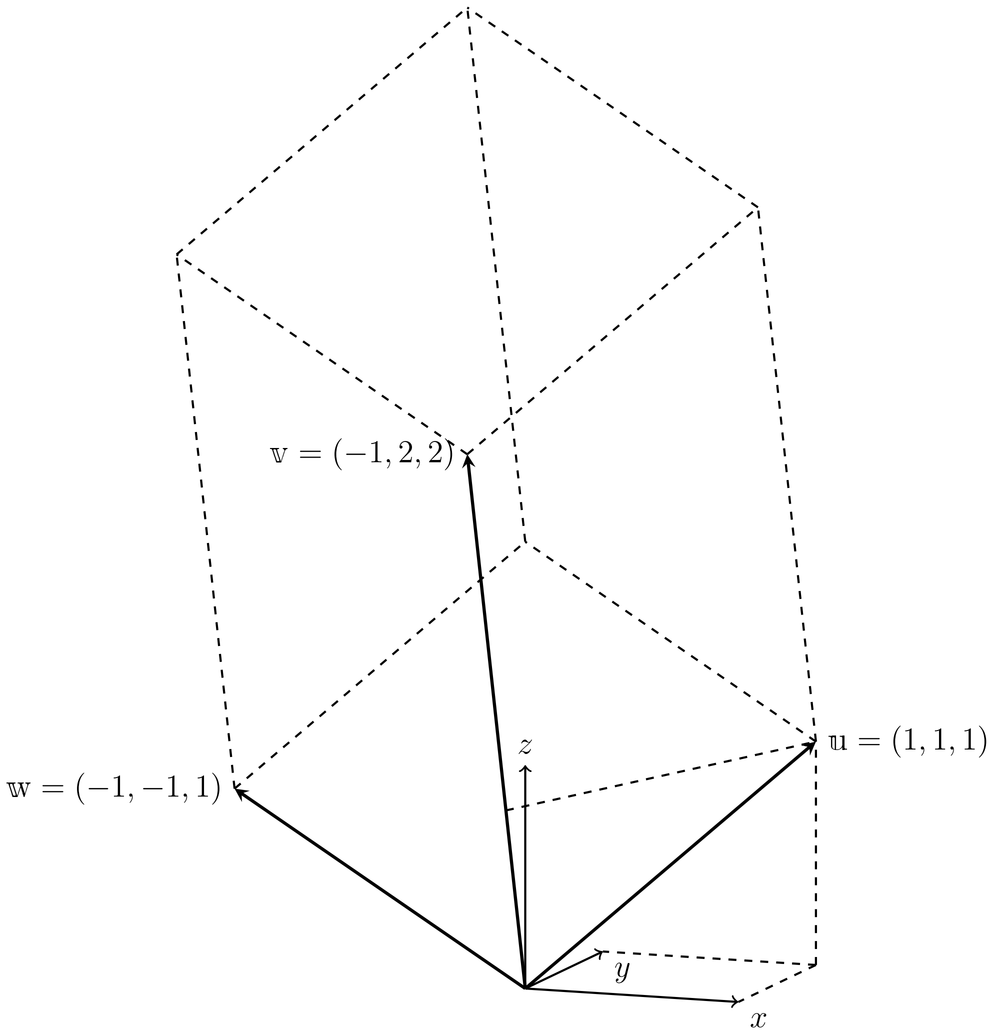
$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 0 \\ -3x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

b) Løs det inhomogene ligningssystemet gitt ved

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 &= 6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 6 \\ -3x_1 - 2x_2 - x_3 + 2x_4 &= -6 \end{aligned}$$

Oppgave 2

a) Gitt to vektorer $\mathbb{u} = (1, 1, 1)$ og $\mathbb{v} = (-1, 2, 2)$ i $\mathbb{R}^3$.



Finn

(i) skalarproduktet $\mathbb{u} \cdot \mathbb{v}$,

(ii) lengden av projeksjonen av vektoren $\mathbb{u}$ ned på vektoren $\mathbb{v}$.

b) Vektorene $\mathbb{u}$ og $\mathbb{v}$ utspenner et parallellogram. Sammen med vektoren $\mathbb{w} = (-1, -1, 1)$ utspenner de et parallellepiped.

(i) Finn arealet av parallellogrammet utspent av $\mathbb{u}$ og $\mathbb{v}$ ved å bruke kryssproduktet av $\mathbb{u}$ og $\mathbb{v}$.

(ii) Finn volumet av parallellepipedet utspent av $\mathbb{u}$, $\mathbb{v}$ og $\mathbb{w}$.

Oppgave 3

a) La $A = \left[\begin{smallmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{smallmatrix}\right]$. Finn egenverdiene og de tilhørende egenvektorene til A.

b) La $Q(x, y) = 3x^2 + 8xy + 3y^2$.

(i) Skriv $Q(x, y) = \mathbb{x}^T B \mathbb{x}$ for en symmetrisk 2×2-matrise B og $\mathbb{x} = \left[\begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix}\right]$.

(ii) Finn en ortogonal matrise P slik at $P^T BP$ er en diagonalmatrise.

(iii) Bestem hvilket kjeglesnitt ligningen $3x^2 + 8xy + 3y^2 + \sqrt{2}x - \sqrt{2}y - 8 = 0$ beskriver (ellipse, hyperbel eller parabel), og lag en skisse i xy-planet.

Oppgave 4 La

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) (i) Hva er definisjonen av kolonnerommet til matrisen A?

(ii) Finn lineært uavhengige vektorer som utspenner kolonnerommet til A.

(iii) Hva er dimensjonen til kolonnerommet til A?

b) Matrisen A gir opphav til en lineær transformasjon $T_A \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, hvor $T_A(\mathbb{x}) = A\mathbb{x}$ for alle $\mathbb{x}$ i $\mathbb{R}^3$.

La $\operatorname{Im} T_A = \{\mathbb{b} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbb{b} = T_A(\mathbb{x}) = A\mathbb{x} \text{ for en } \mathbb{x} \text{ i } \mathbb{R}^3\}$. Vis at $\operatorname{Im} T_A$ er et underrom av $\mathbb{R}^3$.

Oppgave 5 La $\{\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2, \ldots, \mathbb{b}_t\}$ være en mengde med ikke-null vektorer i $\mathbb{R}^n$.

a) La A være en $t \times n$-matrise med $\mathbb{b}_1$, $\mathbb{b}_2, \ldots, \mathbb{b}_{t-1}$ og $\mathbb{b}_t$ som rad nummer $1, 2, \ldots, t-1$ og t, henholdsvis. Begrunn hvorfor nullrommet til A er alle vektorene i $\mathbb{R}^n$ som står ortogonalt på alle radene i A, dvs. $\{\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2, \ldots, \mathbb{b}_t\}$.

b) La nå $\{\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2, \ldots, \mathbb{b}_t\}$ være en ortonormal mengde av vektorer i $\mathbb{R}^n$ for $t < n$.

(i) Vis at $\{\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2, \ldots, \mathbb{b}_t\}$ er lineært uavhengig.

(ii) La A være som i (a). Bestem rangen og nulliteten til A.

(iii) Vis at $\{\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2, \ldots, \mathbb{b}_t\}$ kan utvides til en ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$.