Løsningsforslag eksamen i MA1201, høst 2015

Oppgave 1

homogene systemet

inhomogene systemet

$$\left[\begin{array}{cccc|c|c} 3 & 1 & 2 & 2 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & -2 & 0 & 6 \\ -3 & -2 & -1 & 2 & 0 & -6 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \cdot -3 \quad \cdot 3 \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c|c} 0 & -5 & -7 & 8 & 0 & -12 \\ 1 & 2 & 3 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 8 & -4 & 0 & 12 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \cdot \frac{1}{4} \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c|c} 0 & -5 & -7 & 8 & 0 & -12 \\ 1 & 2 & 3 & -2 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \cdot -2 \quad 5 \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c|c} 0 & 0 & 3 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot \frac{1}{3} \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \end{array}\right] \begin{array}{l} \cdot 1 \quad -2 \\ \\ \\ \end{array} \sim \left[\begin{array}{cccc|c|c} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Homogene:

$$\begin{aligned} x_3 &= -x_4 \\ x_1 &= -x_4 \\ x_2 &= 3x_4 \end{aligned} \Rightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) = x_4(-1, 3, -1, 1), \ x_4 \in \mathbb{R}$$

a) Alle løsningene av det homogene ligningssystemet er

$$\underline{\{a(-1,3,-1,1) \mid a \in \mathbb{R}\}}.$$

b) Vi har $\left\{\begin{aligned} x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 \quad + x_4 &= 1 \\ x_2 \quad - 3x_4 &= 1 \end{aligned}\right\}$ for det inhomogene systemet.

Vi kan velge $x_4 = 0$, da blir $(1,1,1,0)$ en løsning av det inhomogene ligningssystemet, slik at alle løsningene er gitt ved $\underline{\{(1,1,1,0) + a(-1,3,-1,1) \mid a \in \mathbb{R}\}}$.

Oppgave 2

(a) (i) $u \cdot v = (1,1,1)(-1,2,2) = 1\cdot(-1) + 1\cdot 2 + 1\cdot 2 = -1+2+2 = \underline{3}$

(ii) Vi har $u \cdot v = \|u\| \|v\| \cos\theta$, der θ er vinkelen mellom vektorene u og v. Videre er $\|u\| |\cos\theta|$

lengden av projeksjonen av vektoren $\mathbf{u}$ ned på $\mathbf{v}$, slik at

$$\|\mathbf{u}\|\,|\cos\theta| = \left|\frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{v}\|}\right| = \left|\frac{3}{\sqrt{(-1)^2+2^2+2^2}}\right| = \frac{3}{\sqrt{9}} = \frac{3}{3} = \underline{\underline{1}}.$$

(b) (i) Arealet av parallellogrammet er $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|$, der

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = \left(1\cdot 2 - 1\cdot 2,\ -(1\cdot 2 - 1(-1)),\ 1\cdot 2 - (-1)\cdot 1\right)$$

$$= (0, -3, 3).$$

Arealet blir $\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\| = \sqrt{0^2+(-3)^2+3^2} = \sqrt{9+9} = \underline{\underline{3\sqrt{2}}}$

(ii) Volumet er gitt ved grunnflate × høyde

$$\underbrace{\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|}_{\text{grunnflate}}\ \underbrace{\left|\frac{\mathbf{u}\times\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\times\mathbf{v}\|}\cdot\mathbf{w}\right|}_{\text{høyde}} = |(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot\mathbf{w}|$$

$$= |(0,-3,3)(-1,-1,1)| = \underline{\underline{6}}$$

Oppgave 3

(a) $\lambda I_2 - A = \begin{bmatrix} \lambda-3 & -4 \\ -4 & \lambda-3 \end{bmatrix}$

$$\det(\lambda I_2 - A) = (\lambda-3)^2 - 16 = \lambda^2 - 6\lambda - 7$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \| $$
Ser $\lambda = -1$ er rot, det gir $(\lambda+1)(\lambda-7)$

Egenverdier: $\underline{\underline{\lambda_1 = 7,\ \lambda_2 = -1}}$

Egenvektorer: $\lambda_1 = 7$: $\lambda_1 I_2 - A = \begin{bmatrix} 7-3 & -4 \\ -4 & 7-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -4 \\ -4 & 4 \end{bmatrix}$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 4 & -4 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 4 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \cdot \tfrac{1}{4} \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Rightarrow x = y$$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{\text{Egenvektorer } \left\{ x\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} \,\middle|\, x \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \right\}}}$

$\underline{\lambda_2 = -1}$: $\lambda_2 I_2 - A = \begin{bmatrix} -1-3 & -4 \\ -4 & -1-3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -4 \\ -4 & -4 \end{bmatrix}$

Tilsvarende, egenvektorer $\underline{\underline{\left\{ x \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \middle| 0 \neq x \in \mathbb{R} \right\}}}$.

(b) (i) La $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$, Da er

$$Q(x,y) = 3x^2 + 8xy + 3y^2$$
$$= x(3x+4y) + y(4x+3y)$$
$$= [x \ \ y] \begin{bmatrix} 3x+4y \\ 4x+3y \end{bmatrix}$$
$$= [x \ y] \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \underline{\underline{\mathbf{x}^T B \mathbf{x}}}, \text{ der } \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}.$$

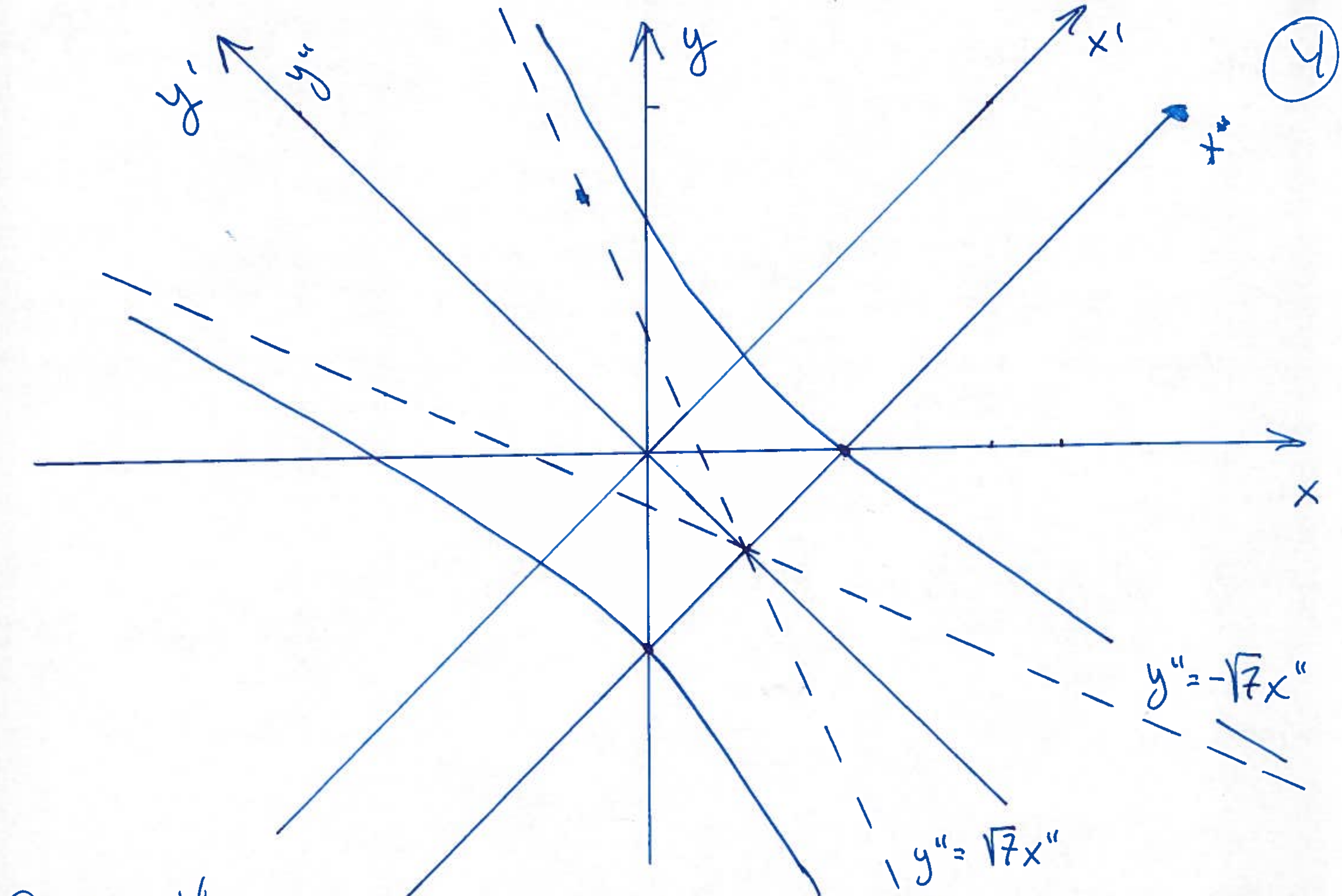
(ii) Matrisen B er lik matrisen A fra punkt a). Siden B er en symmetrisk matrise, har vi fra teorien at ved å velge P slik at kolonnene er egenvektorer til B med lengde 1, (og de utgjør et høyre håndssystem), så blir P en ortogonal matrise. Vi velger

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Da blir $\underline{\underline{P^T B P = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}}$.

(iii) La $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = P \begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = P\mathbf{x}'$. Da blir

$$0 = \underbrace{3x^2 + 8xy + 3y^2}_{} + \sqrt{2}x - \sqrt{2}y - 8 =$$
$$(\mathbf{x}')^T P^T B P \mathbf{x}' + \cancel{\sqrt{2}} \frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}(x' - y') - \cancel{\sqrt{2}} \frac{1}{\cancel{\sqrt{2}}}(x' + y') - 8$$
$$= 7(x')^2 - (y')^2 - 2y' - 1 - 7$$
$$= 7(x')^2 - (y'+1)^2 - 7, \text{ dvs.}$$
$$(x')^2 - \left(\frac{y'+1}{\sqrt{7}}\right)^2 = 1, \quad x'' = x', \ y'' = y'+1 \quad (y'')^2 = 7(x')^2 - 7$$
$$|y''| \leq \sqrt{7}|x'|$$



Oppgave 4

(a)(i) For en $m \times n$-matrise A så er kolonnerommet til A underrommet av $\mathbb{R}^m$ utspent av alle kolonnene i A, dvs. alle vektorene på formen

$$a_1 c_1(A) + a_2 c_2(A) + \cdots + a_n c_n(A)$$

for $a_i \in \mathbb{R}$. I vårt tilfelle

$$\left\{ a_1 \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \;\middle|\; a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

(ii) Gjør elementære radoperasjoner på kolonnevektorene

$$\begin{array}{ccc} 3 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \end{array} \begin{array}{c} \\ \cdot 1 \quad -3 \\ \\ \end{array} \sim \begin{array}{ccc} 0 & -5 & 3 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & -3 \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \cdot 1 \end{array} \sim \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & -3 \end{array} \begin{array}{c} \\ \\ \cdot \frac{1}{5} \end{array}$$

$$\sim \begin{array}{ccc} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{5} \end{array}$$

Dette gir at $\mathbb{b}_1 = (1, 2, -2)$ og $\mathbb{b}_2 = (0, 1, -\frac{3}{5})$ utspenner kolonnerommet til A og de er lineært uavhengige (ikke parallelle), så $\{\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2\}$ er en basis for kolonnerommet til A.

(iii) Av (ii) har vi at dimensjonen til kolonne- (5)
rommet til A er 2.

(b) $\mathrm{Im}\, T_A$ er et underrom av $\mathbb{R}^3$ hvis for alle $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$
i $\mathrm{Im}\, T_A$ og $c \in \mathbb{R}$, så er

(I) $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathrm{Im}\, T_A$

(II) $c\mathbf{x} \in \mathrm{Im}\, T_A$

Vi har at $\mathbf{x} = T_A(\mathbf{u})$ og $\mathbf{y} = T_A(\mathbf{v})$. Da er

(I) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = T_A(\mathbf{u}) + T_A(\mathbf{v}) = T_A(\mathbf{u} + \mathbf{v})$, siden T_A er en linear transformasjon.

Siden $T_A(\mathbf{u}+\mathbf{v}) \in \mathrm{Im}\, T_A$, så er $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathrm{Im}\, T_A$.

(II) $c\mathbf{x} = c\, T_A(\mathbf{u}) = T_A(c\mathbf{u})$, siden T_A er en linear transf.
Slik at $c\mathbf{x} \in \mathrm{Im}\, T_A$. Dermed er $\mathrm{Im}\, T_A$ et underrom av $\mathbb{R}^3$.

<u>Oppgave 5</u>

(a) Vi har at $A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1(A)\mathbf{x} \\ \mathbf{r}_2(A)\mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{r}_t(A)\mathbf{x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1\mathbf{x} \\ \mathbf{b}_2\mathbf{x} \\ \vdots \\ \mathbf{b}_t\mathbf{x} \end{bmatrix}$, slik at $\mathbf{x}$ er i nullrommet til A, dvs. $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, hvis og bare hvis $\mathbf{b}_i\mathbf{x} = 0$
for $i = 1, 2, \dots, t$. Dette viser at nullrommet til A er alle vektorene $\mathbf{x}$ i $\mathbb{R}^n$ som står ortogonalt på alle $\mathbf{b}_i$ for $i = 1, 2, \dots, t$.

(b) (i) Anta at $a_1\mathbf{b}_1 + a_2\mathbf{b}_2 + \dots + a_t\mathbf{b}_t = \mathbf{0}$. Da er

$$0 = \mathbf{0}\cdot\mathbf{b}_j = \left(\sum_{i=1}^{t} a_i\mathbf{b}_i\right)\cdot\mathbf{b}_j = \sum_{i=1}^{t} a_i(\mathbf{b}_i\cdot\mathbf{b}_j) = a_j\, \mathbf{b}_j\cdot\mathbf{b}_j = a_j$$

for alle j. Dette gir at $\{\mathbf{b}_i\}_{i=1}^{t}$ er lineært uavhengig.

(ii) Sidene radene i A er lineært uavhengig av (i), så har radrommet dimensjon t, dvs. $\mathrm{rang}(A) = t$. Siden $\mathrm{rang}(A) + \mathrm{null}(A) = n$, så blir $\mathrm{null}(A) = n - t$.

(iii) Siden $t < n$, så er nullrommet til A forskjellig fra $\{\mathbf{0}\}$, dvs. vi kan velge en $\mathbf{b}_{t+1} \neq \mathbf{0}$ av lengde 1 i nullrommet til A. Dermed blir $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_{t+1}\}$ en ortonormal mengde i $\mathbb{R}^n$. Hvis $t+1 < n$, så kan vi fortsette prosessen helt til vi får $B = \{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$ en ortonormal mengde i $\mathbb{R}^n$. Siden $\mathcal{B}$ er lineært uavhengig bestående av n elementer, så må $\mathcal{B}$ utspenne $\mathbb{R}^n$, dvs. $\mathcal{B}$ er en basis for $\mathbb{R}^n$ og spesielt en ortonormal basis for $\mathbb{R}^n$ som inneholder $\{\mathbb{b}_1, \mathbb{b}_2, \ldots, \mathbb{b}_k\}$.