Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematikk

Løsningsforslag — Øving 10

Med forebehold om feil. Hvis du finner en, ta kontakt med Karin.

Kapittel 5.3

2 **b)** Volumet er gitt ved

$$D(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) = \det\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 3 & 4\\ 1 & 1 & 5\end{bmatrix} \overset{\substack{R_2-2R_1\\ R_3-R_1}}{=} \det\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix} = 4$$

c) Volumet er gitt ved

$$\begin{aligned} D(\mathbf{x},\mathbf{y},\mathbf{z}) = \det\begin{bmatrix}3 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 3\\ -2 & 1 & -1\end{bmatrix} &= \det\begin{bmatrix}1 & 3\\ -2 & -1\end{bmatrix} - \det\begin{bmatrix}3 & 2\\ 1 & 3\end{bmatrix}\\ &= -1+6-9+2 = -2\end{aligned}$$

3 Arealet av trekanten er halvparten av arealet av parallellogrammet utspent av vektorene $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$, og dermed gitt ved:

$$\begin{aligned} \mathsf{areal}(\Delta ABC) = \frac{1}{2}D(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) &= \frac{1}{2}\det\begin{bmatrix}b_1-a_1 & b_2-a_2\\ c_1-a_1 & c_2-a_2\end{bmatrix}\\ &= \frac{1}{2}((b_1-a_1)(c_2-a_2)-(b_2-a_2)(c_1-a_1))\\ &= \frac{1}{2}(b_1c_2-b_1a_2-a_1c_2+a_1a_2-b_2c_1+b_2a_1+a_2c_1-a_2a_1)\\ &= \frac{1}{2}((b_1c_2-c_1b_2)-(a_1c_2-a_2c_1)+(a_1b_2-a_2b_1))\\ &= \frac{1}{2}\left(\det\begin{bmatrix}b_1 & b_2\\ c_1 & c_2\end{bmatrix} - \det\begin{bmatrix}a_1 & a_2\\ c_1 & c_2\end{bmatrix} + \det\begin{bmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{bmatrix}\right)\\ &= \frac{1}{2}\det\begin{bmatrix}1 & a_1 & a_2\\ 1 & b_1 & b_2\\ 1 & c_1 & c_2\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Dette er forøvrig en oppgave hvor det er veldig klokt å begynne å regne fra begge ender for å få noe som går opp til slutt. Jeg begynte egentlig med å regne nedenfra.

$\boxed{5}$ **a)** Vi regner ut:

$$\begin{aligned}\mathbf{w}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) &= w_1 \det\begin{bmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{bmatrix} + w_2 \det\begin{bmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{bmatrix} + w_3 \det\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \\ &= w_1 \det\begin{bmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{bmatrix} - w_2 \det\begin{bmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{bmatrix} + w_3 \det\begin{bmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{bmatrix} \\ &= \det\begin{bmatrix} w_1 & w_2 & w_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = D(\mathbf{w},\mathbf{u},\mathbf{v}).\end{aligned}$$

b) Fra a vet vi at

$$\mathbf{u}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = D(u,u,v) = \det\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} \overset{R_2-R_1}{=} \det\begin{bmatrix} u_1 & u_2 & u_3 \\ 0 & 0 & 0 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{bmatrix} = 0,$$

så vi har at $\mathbf{u}$ og $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ er ortogonale.
På tilsvarende måte kan vi regne ut at $\mathbf{v}\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) = 0$, slik at også $\mathbf{v}$ og $\mathbf{u}\times\mathbf{v}$ er ortogonale.

Kapittel 6.1

$\boxed{2}$ For å finne egenverdier og egenvektorer av en kvadratisk matrise A, må vi utføre følgende steg:

1. Finn det karakteristiske polynomet $\det(A-\lambda I)$
2. Finn løsningene på $\det(A-\lambda I) = 0$; dette er egenverdiene til A
3. For hver egenverdi λ, løs systemet $(A-\lambda I)\mathbf{x} = \mathbf{0}$, for å finne en basis for $\mathbf{N}(A-\lambda I)$. Basisvektorene er egenvektorene tilhørende λ.

b) Vi starter med å finne det karakteristiske polynomet:

$$\det(A-\lambda I) = \det\begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - 1.$$

Vi ser at $\det(A-\lambda I) = 0$ hvis og bare hvis $\lambda = \pm 1$; dette er egenverdiene til A
For $\lambda_1 = 1$ ser vi at $A - I = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. En basis for $\mathbf{N}(A-\lambda_1 I)$ er dermed $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$
For $\lambda_2 = -1$ ser vi at $A + I = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. En basis for $\mathbf{N}(A-\lambda_2 I)$ er dermed $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

c) Vi starter med å finne det karakteristiske polynomet:

$$\begin{aligned}\det(A-\lambda I) = \det\begin{bmatrix} 10-\lambda & -6 \\ 18 & -11-\lambda \end{bmatrix} &= (10-\lambda)(-11-\lambda) + 6\cdot 18 \\ &= \lambda^2 + 11\lambda - 10\lambda - 110 + 108 = \lambda^2 + \lambda - 2 = (\lambda-1)(\lambda+2).\end{aligned}$$

Vi ser at løsningene på $\det(A - \lambda I) = 0$ er $\lambda_1 = 1$ og $\lambda_2 = -2$.

For $\lambda_1 = 1$ ser vi at $A - I = \begin{bmatrix} 9 & -6 \\ 18 & -12 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. En basis for $\mathbf{N}(A - \lambda_1 I)$ er dermed $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

For $\lambda_1 = 1$ ser vi at $A - I = \begin{bmatrix} 12 & -6 \\ 18 & -9 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. En basis for $\mathbf{N}(A - \lambda_2 I)$ er dermed $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

l) Når vi regner ut det karakteristiske polynomet i denne oppgaven kommer det nesten ferdig faktorisert. Ikke gang ut den første faktoren!

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 1 & 2-\lambda \end{bmatrix} \\ &= (3-\lambda)((1-\lambda)(2-\lambda) - 2) = (3-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2 - 2) = -\lambda(3-\lambda)^2 \end{aligned}$$

Vi ser at løsningene på $\det(A - \lambda I) = 0$ er $\lambda_1 = 0$ og $\lambda_2 = 3$.

For $\lambda_1 = 0$ ser vi at $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. En basis for $\mathbf{N}(A - \lambda_1 I)$ er dermed $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2/3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

For $\lambda_2 = 3$ ser vi at $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$. En basis for $\mathbf{N}(A - \lambda_2 I)$ er dermed $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$.

m) Vi starter med å finne det karakteristiske polynomet. Her får vi først et ganske stygt uttrykk! I håp om å finne felles faktorer, ganger vi ikke ut tredjegradspolynomet fra andre ledd av kofaktorekspansjonen.

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda I) &= \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & -1 & 4 \\ 3 & 2-\lambda & -1 \\ 2 & 1 & -1-\lambda \end{bmatrix} \\ &= \det \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -1-\lambda \end{bmatrix} + (2-\lambda)\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & -1-\lambda \end{bmatrix} - \det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \\ &= 3(-1-\lambda) + 2 - (2-\lambda)(1-\lambda)(1+\lambda) - (2-\lambda)8 + (1-\lambda) + 12 \\ &= -(2-\lambda)(1-\lambda)(1+\lambda) + (-3+8-1)\lambda + (-3+2-16+1+12) \\ &= -(2-\lambda)(1-\lambda)(1+\lambda) - 4(1-\lambda) = -(1-\lambda)((2-\lambda)(1+\lambda)+4) \\ &= -(1-\lambda)(2+\lambda-\lambda^2+4) = -(1-\lambda)(6+\lambda-\lambda^2) \\ &= -(1-\lambda)(2+\lambda)(3-\lambda) \end{aligned}$$

Vi ser at løsningene på $\det(A - \lambda I) = 0$ er $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -2$ og $\lambda_3 = 3$.

For $\lambda_1 = 1$ ser vi at

$$A - I = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \overset{R_1 \leftrightarrow R_2}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \overset{\substack{R_1 - R_3 \\ (-1)\cdot R_2}}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$
$$\overset{R_3 - 2R_1 - R_2}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En basis for $\mathbf{N}(A - \lambda_1 I)$ er dermed $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$.

For $\lambda_2 = -2$ ser vi at

$$A + 2 \cdot I = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{\substack{R_2 - R_1 \\ R_1 - R_3}}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 5 & -5 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$
$$\overset{\substack{R_3 - 2R_1 \\ \frac{1}{5}R_2}}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 5 & -5 \end{bmatrix} \overset{R_3 - 5R_2}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En basis for $\mathbf{N}(A - \lambda_2 I)$ er dermed $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

For $\lambda_3 = 3$ ser vi at

$$A - 3 \cdot I = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -4 \end{bmatrix} \overset{\substack{R_2 + R_1 \\ R_3 + R_1}}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\overset{R_1 \leftrightarrow R_2}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{R_2 + 2R_3}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

En basis for $\mathbf{N}(A - \lambda_3 I)$ er dermed $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

(har jeg nevnt at kontrollregning er lurt? Bare sjekk at $A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$.

3 Vi viser påstanden kun for øvretriangulære matriser, beviset for nedretriangulære er symmetrisk (ja, det var en mattevits). Dermed ser vi på en matrise

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & * & \cdots & * \\ 0 & a_2 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n \end{bmatrix}$$

der $*$ symboliserer villkårlige tall (som vi ikke bryr oss om).

Da har vi at

$$\det(A-\lambda I) = \det \begin{bmatrix} a_1-\lambda & * & \cdots & * \\ 0 & a_2-\lambda & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & a_n-\lambda \end{bmatrix} = (a_1-\lambda)(a_2-\lambda)\cdots(a_n-\lambda).$$

Det karakteristiske polynomet har altså røtter lik $a_1, \cdots a_n$, det vil si at diagonalelementene i A er egenverdiene til A.

4 Her er trikset å tenke på hva de to operasjonene gjør med ulike vektorer. Vi antar at V er et underrom.

Se først på proj_V. Denne operasjonen sender vektorer i V til seg selv og vektorer i $V^\perp$ til null. Så for en vektor $\mathbf{x}$ i V er $\mathrm{proj}_V\,\mathbf{x} = \mathbf{x}$. For en vektor $\mathbf{x}$ i $V^\perp$ er $\mathrm{proj}_V\,\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Så egenverdiene til proj_V er 1 og 0. Et fullt sett med egenvektorer tilhørende 1 får vi fra basisen til V. Et fullt sett med egenvektorer tilhørende 0 får vi fra basisen til $V^\perp$. Nå vet vi at basisvektorene for V og $V^\perp$ til sammen utgjør en basis for $\mathbb{R}^n$. Fra det kan vi konkludere at proj_V er en diagonaliserbar matrise, og at vi faktisk har funnet alle egenverdier og egenvektorer.

Når det gjelder refleksjonen R_V vet vi at den sender vektorer i V til seg selv, og snur vektorer i $V^\perp$. Så for en vektor $\mathbf{x}$ i V er $\mathrm{proj}_V\,\mathbf{x} = \mathbf{x}$. For en vektor $\mathbf{x}$ i $V^\perp$ er $\mathrm{proj}_V\,\mathbf{x} = -\mathbf{x}$. Altså har R_V egenverdier 1 og -1, og som før ser vi at et fullt sett med egenvektorer tilhørende 1 får vi fra basis til V og et fullt sett med egenvektorer tilhørende -1 får vi fra basis til $V^\perp$. Med samme resonnement som før ser vi at dette er alle egenverdier og egenvektorer.

6 Husk at vi har antatt at A er inverterbar. Da vet vi at alle egenverdiene er ulik null, så vi kan dele på dem. Vi har at:

$$A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} \Leftrightarrow A^{-1}A\mathbf{x} = A^{-1}\lambda\mathbf{x} \Leftrightarrow \mathbf{x} = \lambda A^{-1}\mathbf{x} \Leftrightarrow A^{-1}\mathbf{x} = \frac{1}{\lambda}\mathbf{x}$$

Altså har vi at λ er en egenverdi til A hvis og bare hvis $\frac{1}{\lambda}$ er en egenverdi til A^{-1}. Dermed er egenverdiene til A^{-1} de multipliktative inversene av egenverdiene til A.

9 Vi vet at $A\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x}$ og $A^T\mathbf{y} = \mu\mathbf{y}$.

Fra proposisjon 2.5.2 på side 120 har vi at $(A\mathbf{x})\cdot\mathbf{y} = \mathbf{x}\cdot(A^T\mathbf{y})$. Dermed kan vi regne ut at

$$\lambda(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}) = (\lambda\mathbf{x})\cdot\mathbf{y} = (A\mathbf{x})\cdot\mathbf{y} = \mathbf{x}\cdot(A^T\mathbf{y}) = \mathbf{x}\cdot(\mu\mathbf{y}) = \mu(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}).$$

en omskriving av det gir oss at $(\lambda-\mu)(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}) = 0$. Dersom $\lambda \neq \mu$ medfører det at $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = 0$.