MA1201/MA6201
Høsten 2016

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematikk

# Løsningsforslag — Øving 11

Med forebehold om feil. Hvis du finner en, ta kontakt med Karin.

## Kapittel 6.2

2 **a) Stemmer.** Anta at $A$ har de distinkte egenverdiene $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$. La $\mathbf{x}_i$ være egenvektoren tilhørende egenverdien $\lambda_i$, slik at $A\mathbf{x}_i = \lambda_i \mathbf{x}_i$. La $P$ være matrisen som har $\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n$ som kolonnevektorer (i den rekkefølgen). Fra teorem 5.2.1 vet vi at $\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_n$ er lineært uavhengige, så $P$ er en inverterbar matrise. La $\Lambda$ være diagonalmatrisen som har $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ som diagonalelementer.

La oss se på

$$AP = A\begin{bmatrix}\mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}A\mathbf{x}_1 & \cdots & A\mathbf{x}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\lambda_1\mathbf{x}_1 & \cdots & \lambda_n\mathbf{x}_n\end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix}\mathbf{x}_1 & \cdots & \mathbf{x}_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\lambda_1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots\\ \vdots & \ddots & \ddots & 0\\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n\end{bmatrix} = P\Lambda.$$

Ligningen $AP = P\Lambda$ kan vi skrive om til $\Lambda = P^{-1}AP$. Siden $\Lambda$ er en diagonalmatrise, er $A$ altså diagonaliserbar.

**b) Stemmer ikke.** La $B$ være en ikke-diagonaliserbar kvadratisk matrise, for eksempel den i eksempel 5. La $A$ være identitetsmatrisen av samme dimensjon som $B$. Da er $A$ diagonaliserbar (den er ferdig diagonalisert), og $AB = B = BA$, men $B$ er ikke diagonaliserbar.

**c) Stemmer.** Anta at $\lambda$ er en egenverdi for $A$, med tilhørende egenvektor $\mathbf{x}$. Vi kan skrive om ligningen $A = P^{-1}AP$ til $PA = BP$. Dermed er

$$B(P\mathbf{x}) = PA\mathbf{x} = P\lambda\mathbf{x} = \lambda(P\mathbf{x}).$$

Det gir oss at $\Lambda$ er en egenverdi for $B$, med tilhørende egenvektor $P\mathbf{x}$. Altså er alle egenverdier av $A$ også egenverdier for $B$. Vi kan på samme måte vise at alle egenverdier av $B$ er egenverdier for $A$, ved å ta utgangspunkt i $AP^{-1} = P^{-1}B$. Eventuelt kan vi bruke lemma 2.1.4, side 266, som sier at similære matriser (som $A$ og $B$ er) har samme karakteristiske polynom.

**d) Stemmer ikke.** La oss igjen se på matrisen $B$ fra eksempel 5. Vi viste i eksempelet spesielt at $B$ ikke er diagonaliserbar. Om vi ser på matrisen $D = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{bmatrix}$, så har den samme egenverdier som $B$, men siden $B$ ikke er diagonaliserbar kan det ikke finnes noen matrise slik at $D = P^{-1}BP$.

Alternativt kan man se på $A$ og $B$ av ulik dimensjon, men med samme egenverdier (for eksempel identitetsmatrisene $I_2$ og $I_3$).

$\boxed{3}$ Vi vet at determinanten til en matrise er lik produktet av egenverdiene. Siden 120 ikke er et kvadrattall, og egenverdiene til $A$ er heltall, må $A$ ha to distinkte egenverdier. Da vet vi fra oppgave 2(a) at $A$ er diagonaliserbar.

## Kapittel 6.4

$\boxed{1}$ Når vi vil diagonalisere en symmetrisk matrise følger vi denne oppskriften

1. Finn det karakteristiske polynomet til matrisen
2. Finn egenverdiene til matrisen.
3. Finn egenvektorene til matrisen. Hvis en egenverdi har algebraisk multiplisitet større enn 1, sørg for at egenvektorene tilhørende den egenverdien er ortogonale. Normaliser egenvektorene.
4. La $P$ være matrisen som har egenvektorene som kolonner, og la $\Lambda$ være diagonalmatrisen som har egenverdiene til $A$ som diagonalelementer, slik at tallet i rad og kolonne $i$ av $\Lambda$ er egenverdien som tilhører egenvektoren i kolonne $i$ av $P$.
5. Du har nå at $\Lambda = P^T AP$. Dette kan du med fordel dobbeltsjekke!

**b)** Vi regner først ut det karakteristiske polynomet for matrisen:

$$\det\begin{bmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 4 & -3-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)(-3-\lambda) - 4\cdot 4 = \lambda^2 - 25 = (\lambda-5)(\lambda+5).$$

Vi har altså egenverdiene $\lambda_1 = 5$ og $\lambda_2 = -5$. Fra det regner vi ut egenvektorer: $A-5I = \left[\begin{smallmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -8 \end{smallmatrix}\right]$ gir oss egenvektoren $\mathbf{x}_1 = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$. Normalisert får vi $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$.
$A+5I = \left[\begin{smallmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{smallmatrix}\right]$ gir oss egenvektoren $\mathbf{x}_2 = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right]$. Normalisert får vi $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -2 \end{smallmatrix}\right]$.
Da får vi at $P = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{smallmatrix}\right]$.
Vi kontrollregner:

$$\begin{aligned} P^T AP &= \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 10 & 5 \\ -5 & 10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 25 & 0 \\ 0-25 & \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{bmatrix} = \Lambda \end{aligned}$$

**f)** Vi regner først ut det karakteristiske polynomet for matrisen:

$$\begin{aligned} &\det\begin{bmatrix} 1-\lambda & -2 & 2 \\ -2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} = \\ &= (1-\lambda)\det\begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} + 2\det\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{bmatrix} + 2\det\begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 1-\lambda & 2 \end{bmatrix} \\ &= (1-\lambda)((1-\lambda)(1-\lambda)-4) + 2(-2(1-\lambda)-4) + 2(-4-2(1-\lambda)) \\ &= -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 27 \end{aligned}$$

Det er ikke så vanskelig å se at $\lambda = 3$ er en rot av polynomet. Med polynomdivisjon får vi at

$$-\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda - 27 = -(\lambda - 3)^2(\lambda + 3),$$

Så egenverdiene er $\lambda_{1,2} = 3$ (dobbel rot) og $\lambda_3 = -3$.

$$A - 3I = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ -2 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \underset{R_3 - R_1}{\overset{R_2 - R_1}{\rightsquigarrow}} \begin{bmatrix} -2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

gir oss egenvektorene $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$. Disse er ikke ortonormale, men ved å bruke Gram-Schmidt og så normalisere resultatet får vi egenvektorene $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$.

$$A + 3I = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{bmatrix} \overset{R_1 \leftrightarrow R_3}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ -2 & 4 & 2 \\ 4 & -2 & 2 \end{bmatrix} \underset{R_3 - 2R_1}{\overset{R_2 + R_1}{\rightsquigarrow}} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & -6 & -6 \end{bmatrix}$$

$$\overset{R_3 + R_2}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \underset{\frac{1}{6} \cdot R_2}{\overset{\frac{1}{2} \cdot R_1}{\rightsquigarrow}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

gir oss egenvektoren $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$, som normalisert blir $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Dette gir oss matrisen $P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

Jeg vil såklart også her anbefale kontrollregning ;)

$\boxed{3}$ Vi vet at $A$ er symmetrisk, så den må ha et fullt sett med egenvektorer. $A$ har egenverdiene $\lambda_1 = 2$ og $\lambda_2 = 1$. $\lambda_1$ har geometrisk (og dermed algebraisk) multiplisitet 1, så $\lambda_2$ må ha geometrisk og algebraisk multiplisitet 2.

Videre vet vi at $E(\lambda_2) = E(\lambda_1)^\perp$. Det vil si at dersom vi kan finne en basis for $E(\lambda_1)^\perp$, så har vi et fullt sett med egenvektorer tilhørende $\lambda_2$. Da har vi også et fullt sett med egenvektorer for $A$. Hvis de i tillegg er ortogonale, så har vi at $A = P\Lambda P^T$, der $P$ inneholder egenvektorene til $A$ og $\Lambda$ inneholder egenverdiene.

For å finne egenvektorene for $E(\lambda_2)$ utvider vi basisen for $E(\lambda_1)$ til en ortogonal basis for $\mathbb{R}^3$. De nye basisvektorene er da basisvektorer for $E(\lambda_1)^\perp = E(\lambda_2)$. Vi starter med utgangspunkt i

$$\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{u}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

som er en basis for $\mathbb{R}^3$. Vi kommer til å normalisere de nye vektorene underveis.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= \frac{1}{\|\mathbf{u_1}\|}\mathbf{u}_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}\\
\mathbf{v}_2' &= \mathbf{u}_2 - \frac{\mathbf{u}_2\cdot\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v_1}\|}\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\-1\\-1\end{bmatrix}\\
\mathbf{v}_2 &= \frac{1}{\|\mathbf{v_2'}\|}\mathbf{v}_2' = \frac{3}{\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{3}\begin{bmatrix}2\\-1\\-1\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}2\\-1\\-1\end{bmatrix}\\
\mathbf{v}_3' &= \mathbf{u}_3 - \frac{\mathbf{u}_3\cdot\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v_1}\|}\mathbf{v}_1 - \frac{\mathbf{u}_3\cdot\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v_2}\|}\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} - \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} - \frac{-1}{\sqrt{6}}\cdot\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}2\\-1\\-1\end{bmatrix}\\
&= \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + \frac{1}{6}\begin{bmatrix}2\\-1\\-1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}\\
\mathbf{v}_3 &= \frac{1}{\|\mathbf{v_3'}\|}\mathbf{v}_3' = \frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{2}\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}0\\1\\-1\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Vi har altså $P = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}\sqrt{2} & 2 & 0\\ \sqrt{2} & -1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{2} & -1 & -\sqrt{3}\end{bmatrix}$ Da får vi

$$
\begin{aligned}
A = P\Lambda P^T &= \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}\sqrt{2} & 2 & 0\\ \sqrt{2} & -1 & \sqrt{3}\\ \sqrt{2} & -1 & -\sqrt{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2}\\ 2 & -1 & -1\\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3}\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{6}\begin{bmatrix}2\sqrt{2} & 2 & 0\\ 2\sqrt{2} & -1 & \sqrt{3}\\ 2\sqrt{2} & -1 & -\sqrt{3}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2}\\ 2 & -1 & -1\\ 0 & \sqrt{3} & -\sqrt{3}\end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}8&2&2\\2&8&2\\2&2&8\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

**4** Siden $A\left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right] = 2\left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right]$, er $\lambda_1 = 2$ en egenverdi for $A$, med tilhørende egenvektor $\mathbf{x}_1 = \left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right]$. Vi vet at produktet av egenverdiene er lik determinanten, så den andre egenverdien må være $\lambda_2 = 3$. Den tilhørende egenvektoren er ortogonal på $\mathbf{x}_1$, så vi kan velge $\mathbf{x}_2 = \left[\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right]$.

Vi normaliserer egenvektorene, og får $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right]$ og $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{smallmatrix}1\\-1\end{smallmatrix}\right]$. Vi setter

$$
\Lambda = \begin{bmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix} \text{ og } P = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}
$$

Da får vi at

$$
\begin{aligned}
A = P\Lambda P^T &= \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&3\\2&-3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{2}\begin{bmatrix}5&-1\\-1&5\end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

12 Jeg viser her kun resultatene for positivt (semi-)definitt; beviset for det negative tilfellet er symmetrisk.

**a)** Anta at $A$ og $B$ er positivt definitte matriser, og anta at $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$. Da er

$$(A+B)\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = (A\mathbf{x}+B\mathbf{x})\cdot x = A\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} + B\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} > 0+0 = 0,$$

og dermed er $A+B$ positivt definitt.

**b)** La $A$ være positivt definitt. La $\lambda$ være en egenverdi for A, med tilhørende egenvektor $\mathbf{x}$.

Da vet vi at $\lambda\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = A\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} > 0$. Siden $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2 > 0$ (egenvektorer er per definisjon ulike nullvektoren), så må også $\lambda > 0$.

På den andre siden, anta at $A$ er en symmetrisk $n\times n$-matrise med kun positive egenverdier $\lambda_1, \cdots, \lambda n$ (telt med multiplisitet). Da vet vi vi kan danne en ortogonal basis for $\mathbb{R}^n$ bestående av egenvektorer til $A$, kall de $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$. La $\mathbf{x}$ være en vilkårlig ikke-null vektor i $\mathbb{R}^n$. Da kan vi skrive $\mathbf{x} = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$. Da har vi at

$$\begin{aligned}
A\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} &= A(a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n)\cdot(a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n)\\
&= (a_1A\mathbf{v}_1 + \cdots + a_nA\mathbf{v}_n)\cdot(a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n)\\
&= (a_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\lambda_nA\mathbf{v}_n)\cdot(a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n)\\
&= a_1^2\lambda_1\|\mathbf{v_1}\|^2 + \cdots + a_n^2\lambda_nA\|\mathbf{v_n}\|^2 > 0
\end{aligned}$$

Den siste ulikheten kommer av at $\|\mathbf{v_i}\|^2 > 0$, $\lambda_i > 0$ for alle $i$, og at $a_i \neq 0$ for minst en $i$.

**c)** Her er beviset nesten som i forrige oppgave, men med noen endringer, så jeg skriver det opp for sikkerhets skyld.

La $A$ være positivt semidefinitt. La $\lambda$ være en egenverdi for A, med tilhørende egenvektor $\mathbf{x}$.

Da vet vi at $\lambda\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = A\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} \geq 0$. Siden $\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2 > 0$ (egenvektorer er per definisjon ulike nullvektoren), så må også $\lambda \geq 0$.

På den andre siden, anta at $A$ er en symmetrisk $n\times n$-matrise med kun ikkenegative egenverdier $\lambda_1, \cdots, \lambda n$ (telt med multiplisitet). Da vet vi vi kan danne en ortogonal basis for $\mathbb{R}^n$ bestående av egenvektorer til $A$, kall de $\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_n$. La $\mathbf{x}$ være en vilkårlig vektor i $\mathbb{R}^n$. Da kan vi skrive $\mathbf{x} = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n$. Da har vi at

$$\begin{aligned}
A\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} &= A(a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n)\cdot(a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n)\\
&= (a_1A\mathbf{v}_1 + \cdots + a_nA\mathbf{v}_n)\cdot(a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n)\\
&= (a_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\lambda_nA\mathbf{v}_n)\cdot(a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_n\mathbf{v}_n)\\
&= a_1^2\lambda_1\|\mathbf{v_1}\|^2 + \cdots + a_n^2\lambda_nA\|\mathbf{v_n}\|^2 \geq 0
\end{aligned}$$

Den siste ulikheten kommer av at for alle $i$ er $a_i^2$, $\|\mathbf{v_1}\|^2$ og $\lambda_i$ større enn eller lik null.

**d)** Siden oppgave (b) sa noe om positive egenverdier, mistenker vi at det kanskje er en ide å vise at $A$ er positivt definitt. La $x \in R^n$ være ulik nullvektoren. Se på

$$A\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = (C^TC\mathbf{x})^T\mathbf{x} = \mathbf{x}^TC^TC\mathbf{x} = (C\mathbf{x})^T(C\mathbf{x}) = \|C\mathbf{x}\|^2$$

Siden $C$ har rang $n$, så er $C\mathbf{x} = 0$ hvis og bare hvis $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Altså har vi at $\|C\mathbf{x}\|^2 > 0$ (siden $\mathbf{x}$ ble antatt å være ulik nullvektoren), og dermed er $A\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} > 0$. Da er $A$ positivt definitt, og har i følge oppgave (b) bare positive egenverdier.

Ta en kikk på oppgave 6.4.1 igjen for løsningsmetoden for de neste to oppgavene!

**Eksamen 2013**

$\boxed{3}$ **a)** Det karakteristiske polynomet er gitt ved:

$$\det\begin{bmatrix} 6-\lambda & -1 \\ -1 & 6-\lambda \end{bmatrix} = (6-\lambda)^2-1 = 36-12\lambda+\lambda^2-1 = \lambda^2-12\lambda+35 = (\lambda-7)(\lambda-5).$$

Vi har altså egenverdiene $\lambda_1 = 7$ og $\lambda_2 = 5$, og regner nå ut egenvektorene.
$A - 7I = \left[\begin{smallmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{smallmatrix}\right] \overset{R_2-R_1}{\rightsquigarrow} \left[\begin{smallmatrix} -1 & -1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ gir oss egenvektoren $\mathbf{x}_1 = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$, som normaliseres til $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$
$A - 5I = \left[\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right] \overset{R_2+R_1}{\rightsquigarrow} \left[\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ gir oss egenvektoren $\mathbf{x}_2 = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$, som normaliseres til $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$
Da har vi at

$$A = P\Lambda P^T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

**Eksamen 2015**

$\boxed{3}$ **a)** Det karakteristiske polynomet er gitt ved:

$$\det\begin{bmatrix} 3-\lambda & 4 \\ 4 & 3-\lambda \end{bmatrix} = (3-\lambda)^2-16 = 9-6\lambda+\lambda^2-16 = \lambda^2-6\lambda-7 = (\lambda+1)(\lambda-7).$$

Vi har altså egenverdiene $\lambda_1 = -1$ og $\lambda_2 = 7$, og regner nå ut egenvektorene.
$A + I = \left[\begin{smallmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{smallmatrix}\right] \overset{R_2-R_1}{\rightsquigarrow} \left[\begin{smallmatrix} 4 & 4 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ gir oss egenvektoren $\mathbf{x}_1 = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$, som normaliseres til $\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$
$A - 7I = \left[\begin{smallmatrix} -4 & 4 \\ 4 & -4 \end{smallmatrix}\right] \overset{R_2+R_1}{\rightsquigarrow} \left[\begin{smallmatrix} 4 & -4 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ gir oss egenvektoren $\mathbf{x}_2 = \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$, som normaliseres til $\mathbf{v}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$
Da har vi at

$$A = P\Lambda P^T = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$