Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematikk

Løsningsforslag — Øving 1

Med forebehold om feil. Hvis du finner en, ta kontakt med Karin.

Kapittel 1.1

$\boxed{6}$ **a)** Linjen inneholder alle punkt $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ slik at $3x_1 + 4x_2 = 6$. Vi kan skrive om ligningen til $x_1 = 2 - \frac{4}{3}x_2$. Dermed kan vi skrive om til

$$\mathbf{x} = \left(2 - \frac{4}{3}x_2, x_2\right) = (2,0) + x_2\left(-\frac{4}{3}, 1\right).$$

For å bli kvitt brøken setter vi $x_2 = 3t$, og får til slutt den parametriske ligningen:

$$\mathbf{x} = (2,0) + t(-4,3).$$

g) Vi starter med å finne retningsvektoren mellom punktene $A = (1,-2,1)$ og $B = (2,1,-1)$

$$\mathbf{v} = \overrightarrow{AB} = (2,1,-1) - (1,-2,1) = (1,3,-2)$$

(Vi kunne såklart brukt $\overrightarrow{BA}$ også. Jeg valgte $\overrightarrow{AB}$ for å få færre minustegn).
Vi setter så retningsvektoren sammen med ett av de opprinnelige koordinatene for å få frem den parametriske ligningen:

$$\mathbf{x} = A + t\mathbf{v} = (1,-2,1) + t(1,3,-2).$$

$\boxed{10}$ For å finne en parametrisk ligning for et plan, trenger vi et punkt $\mathbf{p}_0$ i planet, og to vektorer $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ som er parallelle med planet, men ikke hverandre, se side 11 i boka. Ligningen for planet blir da $\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 + t\mathbf{u} + s\mathbf{v}$.

a) Her velger vi $\mathbf{p}_0 = (-1,0,1)$. Vi velger $\mathbf{u}$ ved å ta retningsvektoren fra $\mathbf{x} = (1,1,1) + t(1,7,-1)$, slik at $\mathbf{u} = (1,7,-1)$. For å finne $\mathbf{v}$ tar vi retningsvektoren fra P til et punkt på linja $\mathbf{x}$, vi velger oss $(1,1,1)$. Da blir $\mathbf{v} = (1,1,1) - (-1,0,1) = (2,1,0)$. Merk at $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ ikke er parallelle. Ligningen for planet blir da:

$$\mathbf{p} = (-1,0,1) + t(1,7,-1) + s(2,1,0)$$

c) De tre punktene er ikke parallele, så vi følger beskrivelsen i boka etter eksempel 9. Vi får

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_0 &= (1,1,2) \\
\mathbf{u} &= (2,3,4) - (1,1,2) = (1,2,2) \\
\mathbf{v} &= (0,-1,2) - (1,1,2) = (-1,-2,0).
\end{aligned}$$

Dermed får vi en ligning for planet:

$$\mathbf{p} = (1,1,2) + t(1,2,2) + s(-1,-2,0).$$

$\boxed{11}$ **a)** Vi benevner hjørnene i polygonet med $P_1, \cdots, P_m$ (mot klokken), og midtpunktet med O. Vi navngir også $\mathbf{x}_i = \overrightarrow{0P_i}$, og vi lurer hva vektorsummen $\mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_m$ blir. For enkelhets skyld setter vi $\mathbf{x}_{m+1} = \mathbf{x}_1$. Vi ser at $\mathbf{x}_{i+1}$ er $\mathbf{x}_i$ rotert med $\frac{2\pi}{m}$ (vi bruker radianer i dette kurset).

Om går rundt et regulært polygon med m hjørner, er hvert side i polygonet lik den forrige, men rotert med en fast vinkel ϕ. Videre kan vi si at hver side er lik den to steg før, men rotert med vinkelen 2ϕ. Om vi itererer dette nok ganger, ser vi at hver side er lik seg selv, rotert med $m\phi = 2\pi$; altså er $\phi = \frac{2\pi}{m}$.

Det betyr at om vi legger vektorene $\mathbf{x}_1, \cdots, \mathbf{x}_m$ etter hverandre, så danner de et regulært polygon med m hjørner. Men det må bety at summen av vektorene blir $\mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_m = 0$.

b) Med samme terminologi som over, la oss ta utgangspunkt i hjørnet P_1. Vektoren fra P_1 til P_i er $\mathbf{y}_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_1$. Summen av alle disse er

$$\begin{aligned}
\mathbf{y}_2 + \cdots + \mathbf{y}_m &= \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 + \cdots + \mathbf{x}_m - \mathbf{x}_1 \\
&= (\mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{x}_m) - (m-1)\mathbf{x}_1 \\
&= (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \cdots + \mathbf{x}_m) - m\mathbf{x}_1 \\
&= -m\mathbf{x}_1
\end{aligned}$$

Mellom andre og tredje linje har jeg brukt et av de eldste triksene i boka, og lagt til $0 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_1$. Mellom tredje og fjerde linje har jeg brukt oppgave **a**.

$\boxed{25}$ Vi antar altså at $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ er ikke-parallelle vektorer i $\mathbb{R}^n$. Det vil si at det ikke kan finnes noen skalar m slik at $\mathbf{x} = m\mathbf{y}$.

a) Anta at $s\mathbf{x} + t\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Jeg viser først at $s = 0$ og så at $t = 0$, ved å vise at det motsatte i hvert tilfelle er umulig. Dette kalles *proof by contradiction* på engelsk (og da spesielt i boka).

Hvis $s \neq 0$, kan vi skrive $\mathbf{x} = \frac{t}{s}\mathbf{y}$, som betyr at vektorene $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ er parallelle. Det gir en motsigelse mot utgangspunktet i oppgaven, så vi må ha at $s = 0$.

Vi vet altså nå at ligningen $t\mathbf{y} = 0$ holder. Om $t \neq 0$, ser vi at $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, som også gir at x og y ikke er parallelle. Dermed må $t = 0$.

b) Om $a\mathbf{x} + b\mathbf{y} = c\mathbf{x} + c\mathbf{y}$, har vi også at $a\mathbf{x} + b\mathbf{y} - c\mathbf{x} - d\mathbf{y} = \mathbf{0}$. Dermed har vi at $(a-c)\mathbf{x} + (b-d)\mathbf{y} = \mathbf{0}$, som vi nå vet betyr at $a - c = 0$ og $b - d = 0$. Dermed er $a = c$ og $b = d$.

Kapittel 1.2

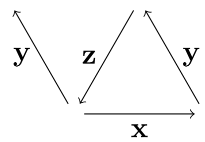
$\boxed{3}$ Her vil vi regne ut vinkelen θ mellom to av vektorene fra karbonatomet til hydrogenatomene. Hvilke to vektorer vi velger spiller ingen rolle! Så jeg velger meg $\mathbf{u} = (1,1,1)$

og $\mathbf{v} = (1, -1, -1)$. Merk at $\|\mathbf{u}\| = \|\mathbf{v}\| = \sqrt{1+1+1} = \sqrt{3}$.

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}}{\|\mathbf{u}\|\|\mathbf{v}\|} = \frac{(1,1,1)\cdot(1,-1,-1)}{\sqrt{3}\sqrt{3}} = \frac{1-1-1}{3} = -\frac{1}{3}$$

Så har vi at $\cos^{-1}(\frac{1}{3}) \approx 1.91$, eller $109{,}5^\circ$ (eksakt).

$\boxed{8}$ Om $\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{z} = 0$ ser vi, ved den geometriske forståelsen av vektoraddisjon at om vi legger de tre vektorene i vilkårlig rekkefølge, danner de en trekant. Siden de er enhetsvektorer, er de også like lange; altså er denne trekanten likesidet, med vinkler på $\frac{\pi}{3}$. Fra figur 1 ser vi at om vi så flytter vektoren $\mathbf{y}$ slik at den deler utganspunkt med $\mathbf{x}$, så må vinkelen mellom vektorene være $\frac{2\pi}{3}$.



Figur 1: Figur til oppgave 1.2.8

$\boxed{16}$ **a)** Se på vektorene $\mathbf{e}_1, \ldots, e_n$, gitt ved at for $\mathbf{e}_i$ er den i'te koordinaten 1 og resten 0. Prikkprodukted $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{y}$ gir den i'te koordinaten til y. Siden vi har sagt at $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = 0$ for alle vektorer $\mathbf{x}$, følger det at alle koordinatene i $\mathbf{y}$ er null, og dermed er $\mathbf{y} = 0$.

b) Om $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \mathbf{x}\cdot\mathbf{z}$ for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, har vi også at $\mathbf{x}(\mathbf{y} - \mathbf{z}) = 0$ for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$. Fra første del av oppgaven vet vi da at $\mathbf{y} - \mathbf{z} = 0$, eller bedre, at $\mathbf{y} = \mathbf{z}$.

Kapittel 1.3

$\boxed{3}$ Her følger vi eksempel 4, og den foregående diskusjonen.

a) Ligningen er $x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 4$, i $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= (4 + 2x_2 - 3x_3, x_2, x_3)\\ &= (4,0,0) + x_2(2,1,0) + x_3(-3,0,1)\end{aligned}$$

b) Ligningen er $x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 = 0$, i $\mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned}\mathbf{x} &= (-x_2 + x_3 - 2x_4, x_2, x_3, x_4)\\ &= x_2(-1,1,0,0) + x_3(1,0,1,0) + x_4(-2,0,0,1)\end{aligned}$$

$\boxed{5}$ **a)** Vi vil altså finne x_1, x_2, x_3 slik at

$$x_1 + x_2 + x_3 = 1 \quad (1)$$
$$2x_1 + x_2 + 2x_3 = 1 \quad (2)$$

Om vi trekker ligning (1) fra ligning (2) to ganger, står vi igjen med $-x_2 = -1$ som forenkles til $x_2 = 1$ Hvis vi setter inn det i (1) og forenkler, får vi $x_1 + x_3 = 0$, eller $x_1 = -x_3$. Altså blir linjen vi leter etter gitt ved:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = (-x_3, 1, x_3) = (0, 1, 0) + x_3(-1, 0, 1)$$

b) Vi vil nå finne x_1, x_2, x_3 slik at

$$x_1 - x_2 = 1 \quad (3)$$
$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \quad (4)$$

Om vi trekker ligning (3) fra ligning (4), får vi at $2x_2 + 2x_3 = 4$, som vi skriver om til $x_3 = 2 - x_2$. Ligning (3) skriver vi om til $x_1 = 1 + x_2$. Altså blir linjen vi leter etter gitt ved:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = (1 + x_2, x_2, 2 - x_2) = (1, 0, 2) + x_2\,(1, 1, -1)$$

$\boxed{12}$ **a)** Anta at $\mathbf{x}$ er en vektor i planet $\mathcal{P} = \operatorname{Span}(\mathbf{u}, \mathbf{v})$. Da er finnes det $r, s \in \mathbb{R}$ slik at $x = r\mathbf{u} + s\mathbf{v}$. Om vi tar prikkproduktet med $\mathbf{u}$ finner vi at $\mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = r\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}$, eller omskrevet: $r = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}}{\|\mathbf{u}\|^2}$. Tilsvarende finner vi ved å ta prikkproduktet med $\mathbf{v}$ at $s = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}}{\|\mathbf{v}\|^2}$. Dermed får vi at

$$x = r\mathbf{u} + s\mathbf{v} = \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}}{\|\mathbf{u}\|^2}\mathbf{u} + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v} = \operatorname{proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{x} + \operatorname{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{x}$$

b) Vi starter med å navngi vektoren som vi skal jobbe med: La $\mathbf{y} = \mathbf{x} - \operatorname{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{x}$. Vi ser at

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{a} \cdot \operatorname{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{x} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{a} \cdot \left(\frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}}{\|\mathbf{a}\|^2}\mathbf{a} \right) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{a} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{0}.$$

Altså ligger vektoren $\mathbf{y}$ i planet $\mathcal{P}$, og vi kan skrive $\mathbf{y} = \operatorname{proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{y} + \operatorname{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{y}$. Når vi setter sammen alt får vi at:

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= \operatorname{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{x} + \mathbf{x} - \operatorname{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{x} = \operatorname{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{x} + \mathbf{y} \\
&= \operatorname{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{x} + \operatorname{proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{y} + \operatorname{proj}_{\mathbf{v}} \mathbf{y} \\
&= \operatorname{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{x} + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{u}\|^2}\mathbf{u} + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v} \\
&= \operatorname{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{x} + \frac{\mathbf{u} \cdot (\mathbf{x} - \operatorname{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{x})}{\|\mathbf{u}\|^2}\mathbf{u} + \frac{\mathbf{v} \cdot (\mathbf{x} - \operatorname{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{x})}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v} \\
&= \operatorname{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{x} + \frac{\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}}{\|\mathbf{u}\|^2}\mathbf{u} + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{x}}{\|\mathbf{v}\|^2}\mathbf{v} \\
&= \operatorname{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{x} + \operatorname{proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{x} + \operatorname{proj}_{\mathbf{y}} \mathbf{x}.
\end{aligned}$$

Vi benytter her at $\mathbf{u} \cdot \operatorname{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{x} = 0$ som kommer av at $\operatorname{proj}_{\mathbf{a}} \mathbf{x}$ er parallell med $\mathbf{a}$, og $\mathbf{u} \cdot \mathbf{a} = 0$.

c) Vi kan for eksempel velge oss $\mathbf{u} = (1, 0, 0)$ og $\mathbf{v} = (1, 1, 0)$. Om vi så velger $\mathbf{x} = (2, 0, 0)$ får vi at

$$\begin{aligned}
\operatorname{proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{x} + \operatorname{proj}_{\mathbf{u}} \mathbf{x} &= \frac{(1,0,0)(2,0,0)}{\|(1,0,0)\|^2}(1,0,0) + \frac{(1,1,0)(2,0,0)}{\|(1,1,0)\|^2}(1,1,0) \\
&= \frac{2}{1}(1,0,0) + \frac{2}{2}(1,1,0) = (2,0,0) + (1,1,0) = (3,1,0).
\end{aligned}$$

Det er ikke så farlig hvilke vektorer vi velger oss, men det er noen ting som er lurt å tenke på er:

- Pass på at det du velger passer til det du skal prøve å vise! Om vi hadde tatt utgangspunkt i $\mathbf{u} = (1, 0, 0)$ og $\mathbf{v} = (0, 1, 0)$ ville det ikke fungert, for her da vi $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = 0$.
- Det er lov å velge seg enkle eksempler, så man ikke regner seg bort. Men pass på forrige punkt!