Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematikk

Løsningsforslag — Øving 2

Med forebehold om feil. Hvis du finner en, ta kontakt med Karin.

For å være helt tydelig, har jeg notert ned hvilken operasjon jeg har brukt på ligningssystemer, og senere matriser. Du trenger ikke å referere til nummerene i boka slik jeg har gjort, men pass på at det kommer tydelig fram hva du gjør.

Kapittel 1.4

$\boxed{1}$ **a)** Vi skal finne en løsning på systemet

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = 1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 & = 1 \\ x_2 + 2x_3 & = 1. \end{cases}$$

Vi bruker først operasjon (iii) til å trekke første linje fra andre, og får:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = 1 \\ x_2 + x_3 & = 0 \\ x_2 + 2x_3 & = 1. \end{cases}$$

Vi bruker så operasjon (iii) til å trekke andre linje fra tredje, og får:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 & = 1 \\ x_2 + x_3 & = 0 \\ x_3 & = 1. \end{cases}$$

Her kan vi bruke tilbakesubstitusjon, eller så kan vi fortsette å regne med ligningene. Vi velger det siste, for å vise hvordan det fungerer. Vi trekker nå tredje linje fra andre:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Til slutt trekker vi andre linje fra første:

$$\begin{cases} x_1 = 2 \\ x_2 = -1 \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

På vektorform blir løsningen

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = (2, -1, 1)$$

c) Vi skal finne en løsning på systemet

$$\begin{cases} 3x_1 - 6x_2 - x_3 + x_4 = 6 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 3 \\ 4x_1 - 8x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 3 \end{cases}$$

Det første jeg ser etter på en slik oppgave, er en rad der koeffisenten for x_1 er nærmest mulig 1. Bingo, rad 2 ser ut som en vinner. Jeg bruker operasjon (ii) til å gange raden med -1, og operasjon (i) til å flytte den øverst.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = -3 \\ 3x_1 - 6x_2 - x_3 + x_4 = 6 \\ 4x_1 - 8x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 3 \end{cases}$$

Så bruker jeg operasjon (iii) til å trekke tre ganger første rad fra andre rad, og fire ganger første rad fra tredje rad.

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = -3 \\ \phantom{x_1 - 2x_2 -{}} 5x_3 + 10x_4 = 15 \\ \phantom{x_1 - 2x_2 -{}} 5x_3 + 10x_4 = 15 \end{cases}$$

Andre og tredje rad er nå blitt identiske, og da er det ingen grunn til at vi beholder begge to. Vi bruker operasjon (ii) til å gange andre rad med $\frac{1}{5}$:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 3x_4 = -3 \\ \phantom{x_1 - 2x_2 - 2{}} x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$

Vi legger to ganger andre rad til første rad:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \phantom{{}+x_3} + x_4 = 3 \\ \phantom{x_1 - 2x_2 {}} x_3 + 2x_4 = 3 \end{cases}$$

Her ser vi at x_2 og x_4 er frie variabler, mens x_1 og x_3 er avhengige variabler. Endelig løsning blir:

$$\begin{cases} x_1 = 3 + 2x_2 - x_4 \\ x_2 = x_2 \\ x_3 = 3 \phantom{{}+2x_2} - 2x_4 \\ x_4 = x_4 \end{cases}$$

På vektorform får vi løsningen

$$\mathbf{x} = (3, 0, 3, 0) + x_2(2, 1, 0, 0) + x_4(-1, 0, -2, 1).$$

$\boxed{4}$ **b)** Vi skriver opp den utvidede matrisen $[A|\mathbf{b}]$, og utfører Gausseliminasjon:

$$[A|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} 2 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \end{array}\right] \overset{(i)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -4 \end{array}\right] \overset{(ii)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -4 \end{array}\right]$$

$$\overset{(iii)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & 6 \\ 0 & 2 & 2 \end{array}\right] \overset{(ii)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \overset{(iii)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Hvis vi oversetter dette tilbake til et ligningssystem, får vi

$$\begin{cases} x_1 - x_2 = -3 \\ \qquad x_2 = 2 \\ \qquad\ 0 = 0. \end{cases}$$

Vi ser at $x_2 = 2$, og $x_1 = -1$, eller på parametrisk form: $\mathbf{x} = (x_1, x_2) = (-1, 2)$. Når vi setter det inn i systemet ser vi også at det stemmer:

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

d) Vi skriver opp den utvidede matrisen $[A|\mathbf{b}]$, og utfører Gausseliminasjon:

$$[A|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right] \overset{(i)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \overset{(iii)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \end{array}\right]$$

$$\overset{(ii)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & -3 & 3 \end{array}\right] \overset{(iii)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Hvis vi oversetter dette tilbake til et ligningssystem, får vi

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 0 \\ x_2 + x_3 = -1 \\ \qquad\ 0 = 0. \end{cases}$$

Vi setter x_3 som fri variabel, og får da

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = -1 - x_3 \\ x_3 = x_3. \end{cases}$$

eller på parametrisk form:

$$\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3) = (0, -1, 0) + x_3(-1, -1, 1)$$

$\boxed{9}$ Vi leter etter vektorer alle enhetsvektorer $\mathbf{x}$ slik at

$$\frac{\mathbf{x} \cdot (1,0,1)}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|(1,0,1)\|} = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ og } \frac{\mathbf{x} \cdot (0,1,0)}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|(0,1,0)\|} = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

Vi setter inn $\|\mathbf{x}\| = 1$, $\|(1,0,1)\| = \sqrt{2}$ og $\|(0,1,0)\| = 1$, og ganger over:

$$\mathbf{x} \cdot (1,0,1) = 1 \text{ og } \mathbf{x} \cdot (0,1,0) = \frac{1}{2}$$

Vi setter så $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, og ganger ut for å få et ligningssystem:

$$\begin{cases} x_1 + x_3 = 1 \\ \qquad x_2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

Med x_3 som fri variabel får vi altså $\mathbf{x} = (1, \frac{1}{2}, 0) + x_3(-1, 0, 1)$. Men vi $\mathbf{x}$ skal være en enhetsvektor! Altså er

$$1 = \|\mathbf{x}\| = \sqrt{(1-x_3)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + x_3^2}$$

Vi kvadrerer, flytter over og ganger ut, og får

$$2x_3^2 - 2x_3 + \frac{1}{4} = 0$$

Dermed har vi

$$x_3 = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

Endelig får vi da at

$$\mathbf{x} = \frac{1}{2}(3, 1, 1) \pm \frac{1}{2\sqrt{2}}(-1, 0, 1)$$

(Her er det lurt å kontrollregne! Jeg måtte regne gjennom tre ganger før alle fortegn var venner med meg...)

$\boxed{15}$ **a)** Et moteksempel er $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{x} = (0, 1)$.

b) Se på menden av vektorer

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1 &= (1, 0, \cdots, 0) \\ \mathbf{x}_2 &= (0, 1, \cdots, 0) \\ &\vdots \\ \mathbf{x}_n &= (0, 0, \cdots, 0). \end{aligned}$$

Vi kan regne ut (se side 39 i boka!) at $A\mathbf{x}_i$ tilsvarer kolonne i i matrisen A. Om $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ for enhver vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, må vi altså ha at hver kolonnene i A kun inneholder 0. Dermed er alle elementene i A null.

Kapittel 1.5

$\boxed{3}$ **a)** Vi følger fremstillingen i eksempel 3 og 4 i boka, og starter med å sette opp en utvidet matrise og utfører Gausseliminiasjon på den:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & b_1 \\ 6 & -2 & b_2 \\ -9 & 3 & b_3 \end{array}\right] \overset{(iii)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & b_1 \\ 0 & 0 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & b_3 + 3b_1 \end{array}\right]$$

Her ser vi at ligningssystemet har løsning hvis og bare hvis $b_2 - 2b_1 = 0$ og $b_3 + 3b_1 = 0$. Med andre ord må vi ha

$$\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) = (b_1, 2b_1, -3b_1) = b_1(1, 2, -3).$$

c) Vi går frem med samme metode som i forrige punkt:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & b_1 \\ 1 & 2 & 1 & b_2 \\ 2 & 1 & -1 & b_3 \end{array}\right] \overset{(i)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & b_2 \\ 0 & 1 & 1 & b_1 \\ 2 & 1 & -1 & b_3 \end{array}\right] \overset{(iii)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & b_2 \\ 0 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & -3 & -3 & b_3 - 2b_2 \end{array}\right]$$
$$\overset{(iii)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & b_2 \\ 0 & 1 & 1 & b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - 2b_2 + 3b_1 \end{array}\right]$$

Systemet har altså en løsning hvis og bare hvis $b_3 - 2b_2 + 3b_1 = 0$. Det vil si, om vi velger b_1 og b_2 som frie variabler, at vi må ha

$$\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) = (b_1, b_2, -3b_1 + 2b_2) = b_1(1, 0, -3) + b_2(0, 1, 2).$$

$\boxed{4}$ Om $\mathbf{b} \in V$, så kan $\mathbf{b}$ skrives som en lineærkombinasjon av vektorene som utspenner V. Om vi setter vektorene som utspenner V opp som kolonnene i en matrise A, så må vi finne en $\mathbf{x}$ slik at $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Det vil si at denne oppgaven er mistenkelig lik den forrige!

a)

$$[A|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{cc|c} -1 & 2 & b_1 \\ 2 & -4 & b_2 \\ 1 & -2 & b_3 \end{array}\right] \overset{(i)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & b_3 \\ 2 & -4 & b_2 \\ -1 & 2 & b_1 \end{array}\right] \overset{(iii)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & b_3 \\ 0 & 0 & b_2 - 2b_3 \\ 0 & 0 & b_1 + b_3 \end{array}\right]$$

Vi ser at vi må ha $b_2 - 2b_3 = 0$ og $b_1 + b_3 = 0$. Altså får vi

$$\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3) = b_3(-1, 2, 1)$$

c)

$$[A|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & -1 & b_2 \\ 1 & 1 & 1 & b_3 \\ 1 & 2 & 0 & b_4 \end{array}\right] \overset{(iii)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & -1 & b_2 \\ 0 & 1 & -1 & b_3 - b_1 \\ 0 & 2 & -2 & b_4 - b_1 \end{array}\right] \overset{(iii)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & -1 & b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & 0 & b_4 - b_1 - 2b_2 \end{array}\right]$$

Vi ser at vi må kreve $b_3 - b_1 - b_2 = 0$ og $b_4 - b_1 - 2b_2 = 0$. Med b_1 og b_2 som frie variabler får vi da:

$$\mathbf{b} = (b_1, b_2, b_3, b_4) = (b_1, b_2, b_1 + b_2, b_1 + 2b_2) = b_1(1, 0, 1, 1) + b_2(0, 1, 1, 2).$$

$\boxed{9}$ **a)** Vi trenger å finne ut når A er singulær, altså for hvilke α den reduserte trappeformen av A *ikke* er identitetsmatrisen (matrisen med 1 på hoveddiagonalen og 0 ellers, se boka side 61). For å finne ut det bruker vi Gausseliminasjon på A. Det er nok å få matrisen på trappeform. Om hvert tall på diagonalen starter med noe som ikke er null, er vi i mål!

Merk at vi ikke uten videre kan dele med α, fordi vi kan ha $\alpha = 0$. Det betyr at det blir litt mer fikling med polynomer av α for å få matrisen på en pen form.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ \alpha & 2 & 1 \\ \alpha & \alpha & 1 \end{bmatrix} \overset{(iii)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ 0 & 2-\alpha^2 & 1-\alpha^2 \\ 0 & \alpha-\alpha^2 & 1-\alpha^2 \end{bmatrix} \overset{(iii)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ 0 & 2-\alpha^2 & 1-\alpha^2 \\ 0 & \alpha-2 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\overset{(iii)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ 0 & -2 & 1-\alpha^2 \\ 0 & \alpha-2 & 0 \end{bmatrix} \overset{(iii)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ 0 & -2 & 1-\alpha^2 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2}(\alpha-2)(\alpha^2-1) \end{bmatrix}$$

Matrisen er altså ikke-singulær om elementene på diagonalen ikke er null. Den er altså hun singulær dersom $-\frac{1}{2}(\alpha-2)(\alpha^2-1) = 0$, det vil si dersom $\alpha = 2$, $\alpha = 1$ eller $\alpha = -1$.

Merk at jeg ikke ganget ut polynomet i denne oppgaven. Det er ofte lurt!

b) Vi behandler de tre punktene hver for seg:

$\alpha = 2$**:** Her får vi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

. Ved Gausseliminasjon får vi

$$[A|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & b_1 \\ 2 & 2 & 1 & b_2 \\ 2 & 2 & 1 & b_3 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & -2 & -3 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - b_2 \end{array}\right]$$

Altså har vi en løsning om $b_2 = b_3$, altså for

$$\mathbf{b} = b_1(1,0,0) + b_2(0,1,1).$$

$\alpha = 1$**:** Her får vi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

. Ved Gausseliminasjon får vi

$$[A|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & b_1 \\ 1 & 2 & 1 & b_2 \\ 1 & 1 & 1 & b_3 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & b_2 - b_1 \\ 0 & 0 & 0 & b_3 - b_1 \end{array}\right]$$

Altså har vi en løsning om $b_1 = b_3$, altså for

$$\mathbf{b} = b_1(1,0,1) + b_2(0,1,0).$$

$\alpha = -1$**:** Her får vi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

. Ved Gausseliminasjon får vi

$$[A|\mathbf{b}] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & b_1 \\ -1 & 2 & 1 & b_2 \\ -1 & -1 & 1 & b_3 \end{array}\right] \rightsquigarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 2 & b_1 \\ 0 & 1 & 1 & b_2 + b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 3b_1 + 2b_2 + b_3 \end{array}\right]$$

Altså har vi en løsning om $b_3 = -3b_1 - 2b_2$, altså for

$$\mathbf{b} = b_1(1,0,-3) + b_2(0,1,-2).$$

10 I oppgaven blir vi presentert for to påstander:

A. $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ medfører at $\mathbf{x} = \mathbf{0}$.

B. $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en unik løsning.

Vi skal vise at påstand A medfører (impliserer/implies) påstand B. I logikken skriver vi dette som A $\Rightarrow$ B.

Eventuelt kan vi finne et moteksempel, men siden dette er en del av proposisjon 5.5 i boka, har vi ikke noen særlig tro på det.

Planen vår er å vise at dersom $\mathbf{y}$ og $\mathbf{z}$ løser $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, så er $\mathbf{y} = \mathbf{z}$. Siden vi ikke antar noe annet om $\mathbf{y}$ og $\mathbf{z}$ enn at $A\mathbf{y} = \mathbf{b} = A\mathbf{z}$, vil det bety at $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en unik løsning.

Anta at $\mathbf{y}$ og $\mathbf{z}$ er vektorer slik at $A\mathbf{y} = \mathbf{b} = A\mathbf{z}$. Da har vi at

$$A(\mathbf{y} - \mathbf{z}) = A\mathbf{y} - A\mathbf{z} = \mathbf{b} - \mathbf{b} = \mathbf{0}.$$

Vi vet (siden vi har antatt påstand A) at $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ medfører at $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Dermed må vi ha at $\mathbf{y} - \mathbf{z} = \mathbf{0}$, så $\mathbf{y} = \mathbf{z}$. Beviset er fullført! [1]

11 Det første vi må gjøre er å finne ut: Tror vi denne påstanden er sann eller falsk? Om A og B er ikke-singulære matriser, så stemmer det jo. Så min tanke var å gjøre A og B ikke-kvadratiske. Si at de er 3×2-matriser. Da vil vektorene $\mathbf{x}$ inneholde to elementer, mens vektorene $\mathbf{b}$ inneholder tre elementer. Det burde gi oss nok "armslagtil å finne A og B som motbeviser påstanden.

Om for eksempel

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ og } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

så ser vi at $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ medfører at $\mathbf{x} = \mathbf{0}$, og $B\mathbf{x} = \mathbf{0}$ medfører at $\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Ligningen $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ vil ha en løsning om $\mathbf{b}$ er en vektor på formen $\mathbf{b} = (b_1, b_2, 0)$. Ligningen $B\mathbf{x} = \mathbf{b}$ vil ha en løsning om $\mathbf{b}$ er en vektor på formen $\mathbf{b} = (b_1, 0, b_3)$. Det følger at påstanden i oppgaven er usann.

[1] Ikke skriv QED etter beviset ditt. Ingen matematikere jeg kjenner gjør det!