Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematikk

MA1201/MA6201
Høsten 2016

Løsningsforslag — Øving 3

Med forebehold om feil. Hvis du finner en, ta kontakt med Karin.

Kapittel 2.1

$\boxed{1}$ **a)**

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 7 & 7 \end{bmatrix}$$

b)

$$2A - B = 2\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

c) $A - C$ er ikke definert, da A og C har ulik dimensjon.

d) $C + D$ er ikke definert, da C og D har ulik dimensjon.

e)

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 7 \\ 22 & 15 \end{bmatrix}$$

f)

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 13 & 20 \end{bmatrix}$$

g)

$$AC = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 10 & 11 \end{bmatrix}$$

h) CA gir ikke mening, da C er en 2×3-matrise og A er en 2×2-matrise.

i) BD gir ikke mening, da B er en 2×2-matrise og D er en 3×2-matrise.

j)

$$DB = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \\ 16 & 11 \end{bmatrix}$$

k)

$$CD = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}$$

l)

$$DC = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 7 & 8 \end{bmatrix}$$

7 **a)** Vi ønsker å finne $A = \left[\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right]$ slik at

$$A^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

To matriser er like dersom alle elementene i matrisene er like. Altså har vi ligningssystemet:

$$\begin{aligned} a^2+bc &= 1 \qquad & ab+bd &= 0 \\ bc+d^2 &= 1 \qquad & ac+cd &= 0 \end{aligned}$$

Fra de to ligningene på høyre side ser vi at enten må $b = c = 0$, eller så må $a = -d$. La oss se på de to tilfellene hver for seg.
Dersom $b = c = 0$, har vi at $a^2 = d^2 = 1$, som medfører at $a = 1$ eller $a = -1$ og $d = 1$ eller $d = -1$. Altså gir dette at A kan være en av de fire matrisene

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ eller } \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Dersom $a = -d$ ser vi at $bc = 1 - a^2$. Det betyr at med mindre $a = \pm 1$, så må $b \neq 0$ og $c \neq 0$. Så for $a \neq \pm 1$ kan vi si at $c = \frac{1-a^2}{b}$. For $a = \pm 1$ må vi ha $b = 0$ eller $c = 0$, men dersom $b = 0$ kan c velges fritt.
Totalt sett gir det oss disse alternativene for A:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

eller

$$\begin{bmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{bmatrix}, \text{ hvor } a \neq \pm 1, b \neq 0$$

eller

$$\begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ eller } \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix}.$$

Her antar vi i utgangspunktet at a, b, c er reelle tall.

c) Hvis vi regner ut som før får vi ligningssystemet:

$$\begin{aligned} a^2+bc &= -1 \qquad & ab+bd &= 0 \\ bc+d^2 &= -1 \qquad & ac+cd &= 0 \end{aligned}$$

Igjen ser vi at enten må $b = c = 0$, eller så må $a = -d$.
Dersom $b = c = 0$ må vi ha $a^2 = d^2 = -1$. Det er det ingen reelle tall som oppfyller, så vi kan se bort ifra dette tilfellet.
Hva skjer hvis $a = -d$? Vi må ha at $bc = -a^2 - 1$. Det skjer ikke dersom $b = 0$ (igjen, da må $a^2 = -1$), så da kan vi skrive $c = \frac{-a^2-1}{b}$. Vi får altså at

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ \frac{-a^2-1}{b} & -a \end{bmatrix},$$

der a er et vilkårlig reellt tall, og $b \neq 0$.

$\boxed{11}$ **a)** For å vise unikhet av en løsning er det en standardoppskrift: Vis at dersom du har to løsninger, så er de to løsningene like.

Anta at $\mathbf{x}_1$ og $\mathbf{x}_2$ er to løsninger av $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. Da har vi at

$$(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = I_n(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = BA(\mathbf{x} - \mathbf{y}) = B(A\mathbf{x} - A\mathbf{y})) = B(\mathbf{b} - \mathbf{b}) = B\mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

b) At et system er konsistent betyr bare at det har minst en løsning. Så om vi finner et uttrykk for $\mathbf{x}$ slik at $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, så er vi i mål.

For enhver vektor $veB \in \mathbb{R}^m$ vil vi ha at $A(C\mathbf{b}) = (AC)\mathbf{b} = \mathbf{b}$. Altså kan vi alltid velge $\mathbf{x} = C\mathbf{b}$.

c) En god måte å vise at $x = y$ er å vise at $x - y = 0$, så det prøver vi på. Først så observerer vi at

$$A(B - C)A = ABA - ACA = AI_n - I_mA = A - A = 0.$$

Dette kommer kanskje ut av tynne luften, men hvis du starter med $(B - C)$ er det en av de få fornuftige tingene du kan gjøre.

Det er fint, men de A'ene på hver side av $(B - C)$ er irriterende. Hadde dette vært tall kunne vi delt på A, men dette er matriser. Hva gjør vi da?

Vel, å dele på et tall x er som å gange med et tall x^{-1} som er slik at $xx^{-1} = 1$. For matriser har vi ikke 1, men vi har identitetsmatrisen! Og vi vet om ting som ganget med A blir identiteten!

Så da får vi

$$(B - C)A = BA(B - C)A = B \cdot 0 = 0.$$

Og på den andre siden,

$$(B - C) = (B - C)AC = 0 \cdot C = 0.$$

Og da er vi faktisk i mål.

Kapittel 2.2

$\boxed{2}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{3}$ Vi vet at når vi vet hva standardvektorene (for 2×2-matriser) $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{u}_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, blir sendt til av T, så kan vi finne en matrise for T (se også side 97 i boka).

Siden T er en lineærtransformasjon, så vi kan bruke egenskapene i definisjonen på side 92:

$$T(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y}) \text{ og } T(c\mathbf{x}) = cT(x)\,.$$

b) Siden

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right),$$

så får vi

$$\begin{aligned}
T(\mathbf{u}_1) &= T\left(\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(T\left(\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}\right) - T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}5\\3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2\\3\end{bmatrix} \text{ og}\\
T(\mathbf{u}_2) &= T\left(\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Så da får vi $T_A = \begin{bmatrix}2 & 1\\3 & -3\end{bmatrix}$.

c) Her har vi

$$\mathbf{u}_1 = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right) \text{ og } \mathbf{u}_1 = \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right)$$

Da får vi

$$\begin{aligned}
T(\mathbf{u}_1) &= T\left(\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(T\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix} \text{ og}\\
T(\mathbf{u}_2) &= T\left(\frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(T\left(\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}\right) - T\left(\begin{bmatrix}1\\-1\end{bmatrix}\right)\right)\\
&= \frac{1}{2}\left(\begin{bmatrix}3\\3\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

Dermed er $T_A = \begin{bmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{bmatrix}$.

(kontrollregning er fortsatt fint!)

$\boxed{11}$ I denne oppgaven kommer definisjonen på side 92 nok en gang til å være til hjelp, så ta en kikk på den! I hele oppgaven lar vi $\mathbf{x}$ og $\mathbf{y}$ være villkårlige vektorer i $\mathbb{R}^n$, og lar $r \in \mathbb{R}$.

a) Vi må vise at cT er en lineærtransformasjon, så vi sjekker betingelsene i definisjonen.

$$\begin{aligned}
(cT)(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= cT(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = c(T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y})) = cT(\mathbf{x}) + cT(\mathbf{y})\\
(cT)(r\mathbf{x}) &= cT(r\mathbf{x}) = crT(x) = r(cT)(\mathbf{x})
\end{aligned}$$

Altså må cT være en lineærtransformasjon.

b) Vi må vise at $T + S$ er en lineærtransformasjon, så vi sjekker betingelsene i definisjonen.

$$\begin{aligned}(T+S)(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= T(\mathbf{x}+\mathbf{y}) + S(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y}) + S(\mathbf{x}) + S(\mathbf{y}) \\ &= (S+T)(\mathbf{x}) + (S+T)(\mathbf{y}) \\ (T+S)(r\mathbf{x}) &= T(r\mathbf{x}) + S(r\mathbf{x}) = rT(\mathbf{x}) + rS(\mathbf{x}) = r(T+S)(\mathbf{x})\end{aligned}$$

Altså må $T + S$ være en lineærtransformasjon.

c) Vi må vise at $S \circ T$ er en lineærtransformasjon, så vi sjekker betingelsene i definisjonen.

$$\begin{aligned}(S \circ T)(\mathbf{x}+\mathbf{y}) &= S(T(\mathbf{x}+\mathbf{y})) = S(T(\mathbf{x}) + T(\mathbf{y})) \\ &= S(T(\mathbf{x})) + S(T(\mathbf{y})) = (S \circ T)(\mathbf{x}) + (S \circ T)(\mathbf{y}) \\ (S \circ T)(r\mathbf{x}) &= S(T(r\mathbf{x})) = S(rT(\mathbf{x})) = r(S(T(\mathbf{x})) = r(S \circ T)(\mathbf{x})\end{aligned}$$

Altså må $S \circ T$ være en lineærtransformasjon.

Eksamen høst 2012

$\boxed{1}$ **a)** Regner ut redusert trappeform av A:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & -5 & 0 \\ 2 & -2 & 2 & -2 \end{bmatrix} \overset{(iii)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & -6 & -4 \end{bmatrix} \overset{(iii)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

A er den utvidete koeffisentmatrisen tilhørende ligningssystemet. Vi kan gjøre om den reduserte trappeformen om til et ligningsystem, som er ekvivalent med det opprinnelige:

$$\begin{aligned} x + 4z &= 1 \\ y + 3z &= 2 \end{aligned}$$

Vi setter $z = t$ som fri variabel, og får at alle løsninger av systemet er på formen $x = 1 - 4t$, $y = 2 - 3t$ og $z = t$, hvor $t \in \mathbb{R}$.

b) Her setter vi opp i en utvidet matrise som før, og prøver å radredusere:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & -5 & 0 \\ 2 & -2 & a^2-2 & a-4 \end{array}\right] \overset{(iii)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & a^2-10 & a-6 \end{array}\right]$$
$$\overset{(iii)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & a^2-4 & a-2 \end{array}\right].$$

Vi reduserer *ikke* videre herifra, for det ville innebære å dele på et uttrykk med a i, og det kan bety at vi deler på null. Dessuten har vi nok informasjon!

Vi kan altså skrive om systemet til:

$$\begin{aligned} x + 4z &= 1 \\ y + 3z &= 2 \\ (a^2 - 4)z &= a - 2. \end{aligned}$$

Vi merker oss at $a^2 - 4 = (a-2)(a+2) = 0$ hvis (og bare hvis) $a = \pm 2$.

Om $a \neq \pm 2$, har koeffisentmatrisen til systemet full rang, og systemet har en unik løsning.

Om $a = 2$, blir den tredje ligningen i det reduserte systemet til $0 = 0$, vi har et system med uendelig mange løsninger (dette er systemet fra oppgave a!)

Om $a = -2$, blir den tredje ligningen i det reduserte systemet til $0 = -4$. Vi har et inkonsistent system, og dermed ingen løsning.

3 Hvis et punkt oppfyller ligningen for planet, så er punktet i planet. Altså sjekker vi, ved å sette inn $(x, y, z) = (1, 2, 0)$ i ligningen for planet:

$$2x + y + 5z - 4 = 2 \cdot 1 + 2 + 5 \cdot 0 - 4 = 2 + 2 - 4 = 0,$$

så punktet er i planet.

Normalvektoren til planet er $(2, 1, 5)$. Punktet (x, y, z) som ligger nærmest origo på planet, ligger på linjen $(0, 0, 0) + t(2, 1, 5) = t(2, 1, 5)$, så vi kan skrive $(x, y, z) = (2t, t, 5t)$. Men (x, y, z) skal også tilfredsstille ligningen for planet. også tilfredsstille ligningen for planet.

Altså:

$$0 = 2(2t) + t + 5(5t) - 4 = 4t + t + 25t - 4 = 30t - 4$$

Så $t = \frac{4}{30} = \frac{2}{15}$, som gir oss $(x, y, z) = (2t, t, 5t) = \frac{1}{15}(4, 2, 10)$.