Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematikk

Løsningsforslag — Øving 4

Med forebehold om feil. Hvis du finner en, ta kontakt med Karin.

Kapittel 2.3

$\boxed{1}$ **b)**

$$[\,A \mid I\,] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{(iii)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right]$$

Vi ser at denne matrisen ikke har noen invers, da den ikke har full rang.

c)

$$[\,A \mid I\,] = \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{(iii)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{(ii)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right] \overset{(iii)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 1 & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} \end{array}\right] = [\,I \mid A^{-1}\,]$$

Altså har vi $A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

d)

$$[\,A \mid I\,] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{(iii)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{(ii)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{(iii)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{(iii)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \overset{(iii)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 4 & -3 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{(iii)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] = [\,I \mid A^{-1}\,]$$

Altså har vi $A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$\boxed{2}$ **a)** For variasjonens skyld, la oss bruke formelen for invers av 2×2-matriser:

$$A^{-1} = \frac{1}{2 \cdot 5 - 3 \cdot 3}\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Videre er løsningen av $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ gitt ved

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Dermed får vi at

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

c) Her må vi går tilbake til den "vanlige"måten å finne inverser på.

$$\left[\, A \mid I \,\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{(iii)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{(i)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{(iii)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\overset{(iii)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$\overset{(iii)}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{array}\right] = \left[\, I \mid A^{-1} \,\right],$$

Så vi finner at

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Videre er løsningen av $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ gitt ved

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Dermed får vi at

$$\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + 2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{7}$ I denne oppgaven kommer vi til å bruke proposisjon 3.1 på side 103 i boka ganske mye. Ta en kikk på det resultatet før du leser videre!

a) For eksempel har vi at

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

så $\left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ har en venstreinvers, og dermed rang 2. Altså kan den ikke ha en høyreinvers.

b) Tilsvarende har $\left[\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&1&0\end{smallmatrix}\right]$ en høyreinvers, men ingen venstreinvers.

c) Vi kan bruke en variant av metoden i eksempel 6, men helt ærlig så er det litt overkill når vi bare skal finne to venstreinverser. Vi skal altså finne to matriser $\left[\begin{smallmatrix}a&b&c\\d&e&f\end{smallmatrix}\right]$ slik at

$$\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a&b&c\\d&e&f\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2\\0&-1\\1&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+c&2a-b+c\\d+f&2d-e+f\end{bmatrix}.$$

Matriser er like når hvert element i matrisene er like. Altså får vi ligningene

$$a+c=1 \tag{1}$$
$$2a-b+c=0 \tag{2}$$
$$d+f=0 \tag{3}$$
$$2d-e+f=1 \tag{4}$$

Ligning (1) er grei å oppfylle hvis $a=1$ og $c=0$. Da er (2) oppfylt dersom $b=2$. Videre kan vi velge $d=f=0$ og $e=-1$ for å oppfylle (3) og (4). Så en høyreinvers er $\left[\begin{smallmatrix}1&2&0\\0&1&0\end{smallmatrix}\right]$.
Men vi kan også velge $a=0$ og $c=1$. Da er (2) oppfylt dersom $b=1$. Som før kan vi velge $d=f=0$ og $e=-1$ for å oppfylle (3) og (4). Dermed blir en annen høyreinvers $\left[\begin{smallmatrix}0&1&1\\0&1&0\end{smallmatrix}\right]$.

Kapittel 2.4

$\boxed{8}$ Fra teorem 3.2, side 105, vet vi at en matrise A er inverterbar hvis og bare hvis den er ikkesingulær. Fra side 61, vet vi at en matrise er ikke-singulær hvis og bare hvis den reduserte trappeformen av matrisen er identitetsmatrisen I. Altså er A inverterbar hvis og bare hvis den har redusert trappeform I.

Vi fikk redusert trappeform av en matrise ved å utføre et endelig antall radoperasjoner på A. Men nå har vi lært i dette kapitlet at å utføre en radoperasjon på A er det samme som å gange med en elementærmatrise. Så vi kan si at A er inverterbar hvis og bare hvis $I=E_nE_{n-1}\cdots E_1A$, der $E_n,E_{n-1},\cdots E_1$ alle er elementærmatriser.

En elementærmatrise er alltid inverterbar, og inversen er en ny elementærmatrise. Så vi kan også si at A er inverterbar hvis og bare hvis

$$A=E_1^{-1}\cdots E_{n-1}^{-1}E_n^{-1}I=E_1^{-1}\cdots E_{n-1}^{-1}E_n^{-1}$$

(pass på rekkefølgen!).

Så vi kan konkludere med at A er inverterbar hvis og bare hvis A kan skrives som et produkt av elementærmatriser.

Kapittel 2.5

$\boxed{1}$ **a)**

$$A^\top = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^\top = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

d)

$$C^\top + D = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}^\top + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$$

f) $AC^\top$ er ikke definert, fordi A er en 2×2-matrise, mens $C^\top$ er en 3×2-matrise.

$\boxed{13}$ Hvis A har rang 1, så kan trappeformen av A skrives $A' = \begin{bmatrix} \mathbf{v}^\top \\ \mathbf{0} \\ \cdots \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}$, der $\mathbf{v}$ er en vektor i $\mathbb{R}^n$. Siden vi kan gå fra A til A' ved radoperasjoner, kan vi også gå tilbake fra A' til A med radoperasjoner, og da ser vi at radene i A alle er skalare multipler av $\mathbf{v}^\top$:

$$A = \begin{bmatrix} u_1\mathbf{v}^\top \\ u_2\mathbf{v}^\top \\ \cdots \\ u_n\mathbf{v}^\top \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdots \\ u_n \end{bmatrix} \mathbf{v}^\top = \mathbf{u}\mathbf{v}^\top,$$

der $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdots \\ u_n \end{bmatrix}$.

$\boxed{16}$ Hvis vi antar at A er symmetrisk, har vi at $A^\top A = A^2 = O$ (her er O nullmatrisen). For enhver vektor $\mathbf{x}$ har vi at $A^\top A\mathbf{x} = O\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Hvis vi bruker resultatet fra oppgave 15, betyr det også at for enhver vektor $\mathbf{x}$ så er $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. Men da kan vi bruke resultatet fra oppgave 1.4.15b, som var på øving 2, til å si at det betyr at $A = O$.

Eksamen kont 2012

$\boxed{1}$ **a)**

$$\begin{bmatrix} 0 & 2 & -5 & 6 \\ 2 & 0 & 4 & 7 \\ -1 & -3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \overset{(i)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & -5 & 6 \end{bmatrix} \overset{(ii)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 2 & 0 & 4 & 7 \\ 0 & 2 & -5 & 6 \end{bmatrix}$$

$$\overset{(iii)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & -6 & 8 & 9 \\ 0 & 2 & -5 & 6 \end{bmatrix} \overset{(i)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -5 & 6 \\ 0 & -6 & 8 & 9 \end{bmatrix} \overset{(iii)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & -7 & 27 \end{bmatrix}$$

$$\overset{(ii)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 2 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{27}{7} \end{bmatrix} \overset{(iii)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -\frac{61}{7} \\ 0 & 2 & 0 & -\frac{93}{7} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{27}{7} \end{bmatrix} \overset{(ii)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 & -\frac{61}{7} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{93}{14} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{27}{7} \end{bmatrix}$$

$$\overset{(iii)}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{157}{14} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{93}{14} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{27}{7} \end{bmatrix}$$

b) Den utvidete matrisen som korresponderer til dette systemet er nettopp matrisen som vi radreduserte i forrige punkt. Så da kan vi lese ut løsningen på systemet fra den reduserte trappeformen av matrisen. Da får vi $x = \frac{157}{14}$, $y = -\frac{93}{14}$ og $z = -\frac{27}{7}$.

$\boxed{5}$ Vi har $(I - A)^{-1} = A^{n-1} + A^{n-2} + \cdots + A + I$. Vi kan vi bektrefte det ved å gange sammen $(I - A)^{-1}(I - A)$, men hvordan kom vi dit?

Vel, vi kan prøve oss fram. Vi ser at

$$A^{n-1}(I - A) = A^{n-1} + A^n = A^{n-1}.$$

Prøv så

$$(A^{n-1} + A^{n-2})(I - A) = A^{n-1} - A^n + A^{n-2} - A^{n-1} = A^{n-2}.$$

Ah, så hver gang vi legger til en lavere potens av A, så får vi ut en enda lavere potens av A. Om vi lar det fortsetter slik, får vi til slutt

$$(A^{n-1}+A^{n-2}+\cdots+A+I)(I-A) = (A^{n-1}-A^n)+(A^{n-1}-A^{n-2})+\cdots+(A-A^2)+(I-A) = I$$