Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematikk

Løsningsforslag — Øving 5

Med forebehold om feil. Hvis du finner en, ta kontakt med Karin.

Kapittel 3.1

$\boxed{1}$ Generelt er fremgangsmåten på denne oppgaven: Sjekk betingelsene i definisjonen på side 121. Det fungerer alltid. På g og h har jeg indikert en alternativ fremgangsmåte. Å sjekke betingelsene i definisjonen er likevel en utmerket løsning. Hvis jeg trenger å referere til mengden i punktet, vil jeg kalle den V.

a) **Ikke underrom**. $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ oppfyller ikke $x_1 + x_2 = 1$, som er kravet for å få være med i V. Altså feiler mengden på punkt 1.

b) **Underrom**.

1. $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0+0 \end{bmatrix}$ er med i V (sett $a = b = 0$.
2. La $\begin{bmatrix} a \\ b \\ a+b \end{bmatrix}$ være en vilkårlig vektor [1] i V, og $c \in \mathbb{R}$. Da ser vi at

$$c \begin{bmatrix} a \\ b \\ a+b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ca \\ cb \\ ca+cb \end{bmatrix} \in V.$$

3. La $\begin{bmatrix} a \\ b \\ a+b \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} c \\ d \\ c+d \end{bmatrix}$. Da ser vi at

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ a+b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c \\ d \\ c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c \\ b+d \\ a+b+c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c \\ b+d \\ (a+c)+(b+d) \end{bmatrix} \in V.$$

Alternativt kunne vi observert at denne mengden er lik Span $\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$, som vi vet er et underrom.

g) **Underrom**. Dette er per definisjon Span $\left(\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$, som i følge proposisjon 1.2, side 129 er et underrom.

h) **Underrom**. Vi observerer at

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = (s+2) \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + (t-1) \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

[1] Her illusteres et viktig prinsipp: Når du velger et vilkårlig element i en mengde, pass på å få med deg så mye informasjon om dette elementet som mulig. Her vet vi at alle elementer i V er på formen $\begin{bmatrix} a \\ b \\ a+b \end{bmatrix}$, så da er også det vilkårlige elementet vårt det.

(Det er greit nok å se etter at du har skrevet $\left[\begin{smallmatrix}3\\0\\1\end{smallmatrix}\right]$ som en lineærkombinasjon av $\left[\begin{smallmatrix}2\\1\\1\end{smallmatrix}\right]$ og $\left[\begin{smallmatrix}1\\2\\1\end{smallmatrix}\right]$, jfr eksempel 3).

Det følger at $V = \text{Span}\left(\left[\begin{smallmatrix}2\\1\\1\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}1\\2\\1\end{smallmatrix}\right]\right)$.

i) **Ikke underrom**. V inneholder ikke nullvektoren, siden

$$\begin{bmatrix}2\\4\\-1\end{bmatrix} + s\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

ikke har noen løsning.

$\boxed{4}$ La oss sjekke kravene på et underrom, fra definisjonen.

1. Siden $A\mathbf{0} = \mathbf{0} = 3\mathbf{0}$, så er $\mathbf{0} \in V$.
2. Anta at $\mathbf{v} \in V$, slik at $A\mathbf{v} = 3\mathbf{v}$, og la $c \in \mathbb{R}$. Da har vi at

$$A(c\mathbf{v}) = c(A\mathbf{v}) = c(3\mathbf{v}) = 3(c\mathbf{v}),$$

   så $c\mathbf{v} \in V$.
3. Anta at $\mathbf{u}\mathbf{v} \in V$, slik at $A\mathbf{u} = 3\mathbf{u}$ og $A\mathbf{v} = 3\mathbf{v}$. Da har vi at

$$A(\mathbf{u} + \mathbf{v}) = A\mathbf{u} + A\mathbf{v} = 3\mathbf{u} + 3\mathbf{v} = 3(\mathbf{u} + \mathbf{v}),$$

   slik at $\mathbf{u} + \mathbf{v} \in V$.

PS: Når et rom som dette ikke er lik $\{0\}$, så kalles de egenrom. De kommer sterkere tilbake i kapittel 6.

$\boxed{6}$ **a)** Vi sjekker som vanlig definisjonen. Husk på at $\mathbf{x} \in U \cap V$ bare betyr at $\mathbf{x} \in U$ og $\mathbf{x} \in V$, og at vi kan bruke at U og V er vektorrom.

1. Siden $\mathbf{0} \in U$ og $\mathbf{0} \in V$, så er $\mathbf{0} \in U \cap V$.
2. Anta at $\mathbf{x} \in U \cap V$ og $c \in \mathbb{R}$. Siden $\mathbf{x} \in U$, er $c\mathbf{x} \in U$, og tilsvarende er $c\mathbf{x} \in V$. Altså er $c\mathbf{x} \in U \cap V$.
3. Anta at $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U \cap V$. Siden $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in U$, er $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in U$, og tilsvarende er $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in V$. Altså er $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in U \cap V$.

Eksempler:

- I $\mathbb{R}^2$, la $U = \text{Span}\left(\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]\right)$, altså x-aksen, og $V = \text{Span}\left(\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]\right)$, altså y-aksen. Da er $U \cap V = \{0\}$.
- I $\mathbb{R}^3$, la $U = \text{Span}\left(\left[\begin{smallmatrix}1\\0\\0\end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right]\right)$, altså xy-planet, og $V = \text{Span}\left(\left[\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right] \left[\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right]\right)$, altså yz-planet. Da er $U \cap V = \text{Span}\left(\left[\begin{smallmatrix}0\\1\\0\end{smallmatrix}\right]\right)$, altså y-aksen.

b) **Nei.** Om vi velger oss $U = \text{Span}\left(\left[\begin{smallmatrix}1\\0\end{smallmatrix}\right]\right)$ og $V = \text{Span}\left(\left[\begin{smallmatrix}0\\1\end{smallmatrix}\right]\right)$ i $\mathbb{R}^2$, så får vi eksempel $2b$ på side 129, som ikke er et underrom.

Generelt er problemet at det tredje kravet i definisjonen av underrom feiler, siden vi får summer av elementer fra to underrom, og disse summene trenger ikke å være i noe av de opprinnelige underrommene.

$\boxed{8}$ I denne oppgaven skal vi vise en ekvivalens mellom to påstander:

a: $\text{Span}(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k) = \text{Span}(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v})$

b: $\mathbf{v} \in \text{Span}(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k)$

Da kan vi vise at den første påstanden impliserer den andre, og så at den andre impliserer den første

a $\Rightarrow$ b: Vi vet at $\mathbf{v} \in \text{Span}(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v})$. Hvis vi antar at påstand a er sann, så ser vi at $\text{Span}(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k) = \text{Span}(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v})$, slik at $\mathbf{v} \in \text{Span}(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k)$.

b $\Rightarrow$ a: Anta at påstand b er sann, slik at $\mathbf{v} \in \text{Span}(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k)$. Vi trenger å vise at $\text{Span}(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k) = \text{Span}(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v})$, men det tilsvarer å vise at $\text{Span}(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k)$ er inneholdt i $\text{Span}(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v})$, og omvendt.

Anta at $\mathbf{u} \in \text{Span}(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k)$, da er $\mathbf{u} = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k$, for noen reelle tall $a_1 \cdots a_k$. Da kan vi også skrive $\mathbf{u} = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k + 0\mathbf{v}$, slik at $\mathbf{u} \in \text{Span}(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v})$. Altså er $\text{Span}(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k)$ inneholdt i $\text{Span}(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k\mathbf{v})$

På den andre siden, anta at $\mathbf{u} \in \text{Span}(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k, \mathbf{v})$. Da er $\mathbf{u} = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k + a\mathbf{v}$. Vi ser at $\mathbf{u} - a\mathbf{v} = a_1\mathbf{v}_1 + \cdots + a_k\mathbf{v}_k \in \text{Span}(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k)$. Vi har allerede antatt at $\mathbf{v} \in \text{Span}(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k)$. Dermed er $\mathbf{u} = (\mathbf{u} - a\mathbf{v}) + a\mathbf{v} \in \text{Span}(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k)$ siden dette er et vektorrom. Altså er $\text{Span}(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k)\mathbf{v}$ inneholdt i $\text{Span}(\mathbf{v}_1, \cdots, \mathbf{v}_k)$.

$\boxed{18}$ Her lønner det seg å først tygge litt på hvordan disse vektorrommene ser ut.

$$(U+V)^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = 0 \,\forall\, \mathbf{u} \in U, \mathbf{v} \in V\}$$
$$U^\perp \cap V^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = 0 \,\forall\, \mathbf{u} \in U \text{ og } \mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = 0 \,\forall\, \mathbf{v} \in V\}$$

Som beskrevet før: Hvis vi vil vise at to mengder er like, er det nok å vise at alle elementer i den ene mengden er i den andre mengden, og omvendt.

Anta at $\mathbf{x} \in (U+V)^\perp$. Da er $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = 0$ for alle $\mathbf{u} \in U$ og $\mathbf{v} \in V$. Spesielt har vi at $\mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{0}) = 0$ for alle $\mathbf{u} \in U$, og tilsvarende at $\mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = \mathbf{x} \cdot (\mathbf{0} + \mathbf{v}) = 0$. Altså er $\mathbf{x} \in U^\perp \cap V^\perp$.

På den andre siden, anta at $\mathbf{x} \in U^\perp \cap V^\perp$. Da er $\mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = 0$ for alle $\mathbf{u} \in U$ og $\mathbf{x} \cdot \mathbf{v} = 0$ for alle $\mathbf{v} \in U$. Dermed er $\mathbf{x} \cdot (\mathbf{u} + \mathbf{v}) = \mathbf{x}\mathbf{u} + \mathbf{x}\mathbf{v} = 0 + 0 = 0$ for alle $\mathbf{u} \in U$ og $\mathbf{v} \in V$.

Det følger at $(U+V)^\perp = U^\perp \cap V^\perp$.

Kapittel 3.2

$\boxed{2}$ **c)** Her følger vi eksempel 1 på side 137, siste del for å finne ligningene.

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & 3 & b_2 \\ -1 & 3 & 0 & b_3 \\ 1 & 0 & -1 & b_4 \end{array}\right] \overset{\substack{R_3 + R_1 \\ R_4 - R_1}}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & 3 & b_2 \\ 0 & 1 & 1 & b_3 + b_1 \\ 0 & 2 & -2 & b_4 - b_1 \end{array}\right]$$

$$\overset{\substack{R_3 - R_2 \\ R_4 - 2R_2}}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & 3 & b_2 \\ 0 & 0 & -2 & b_3 + b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & -8 & b_4 - b_1 - 2b_2 \end{array}\right] \overset{R_4 - 4R_3}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & b_1 \\ 0 & 1 & 3 & b_2 \\ 0 & 0 & -2 & b_3 + b_1 - b_2 \\ 0 & 0 & 0 & -5b_1 + 2b_2 - 4b_3 + b_4 \end{array}\right]$$

Det betyr at kolonnerommet består av vektorer $\mathbf{b} = \left[\begin{smallmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 \end{smallmatrix}\right]$ der $-5b_1 + 2b_2 - 4b_3 + b_4{=}0$

For å dobbeltsjekke, observerer vi at

$$-5\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} - 4\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5+0+4+1 \\ 10+2-12+0 \\ -5+6+0-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

som betyr at kolonnene i A oppfyller kravet vi har satt.

$\boxed{3}$ **b)** Vi finner først en beskrivelse av $\mathbf{C}(A)$ og $\mathbf{N}(A)$:

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & b_1 \\ 2 & 1 & 1 & b_2 \\ 1 & -1 & 2 & b_3 \end{array}\right] \overset{\substack{R_2 - 2R_1 \\ R_3 - R_1}}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & -1 & 1 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & -2 & 2 & b_3 - b_1 \end{array}\right]$$

$$\overset{R_3 - 2R_3}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & b_1 \\ 0 & -1 & 1 & b_2 - 2b_1 \\ 0 & 0 & 0 & 3b_1 - 2b_2 + b_3 \end{array}\right]$$

Fra dette konkluderer vi at vektorene i $\mathbf{C}(A)$ er på formen $\mathbf{b} = \left[\begin{smallmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{smallmatrix}\right]$, der $3b_1 - 2b_2 + b_3 = 0$. Det tilsvarer nullrommet til matrisen $X = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Vi kan også ut ifra trappeformen til A se at $A\mathbf{x} = 0$ dersom $x = t\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$, slik at $\mathbf{N}(A) = \mathrm{Span}(\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right])$. Det er kolonnerommet til enhver ikke-null matrise der kolonnene er skalare multipler av $\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$. For eksempel kan vi ha $Y = \left[\begin{smallmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \\ -1 & 2 \end{smallmatrix}\right]$.

Eksamen 2014

$\boxed{5}$ **a)** **SANT.** Her ser vi at

$$C = CI_m = C(AB) = (CA)B = I_nB = B$$

b) **USANT.** Vi kan for eksempel velge $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{smallmatrix}\right]$, $B = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{smallmatrix}\right]$ og $C = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$.

Generelt kommer du langt ved å innse at i oppgave a får vi kvadratiske matriser, mens i oppgave b bør eksempelet være ikke-kvadratisk.

Eksamen 2013

$\boxed{2}$ **a)**

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 9 & 7 \\ 2 & 9 & 11 \end{bmatrix}$$

$$T_A \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 9 & 7 \\ 2 & 9 & 11 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ -11 \\ -1 \end{bmatrix}$$

b) T_A er surjektiv hvis $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ har en løsning for enhver vektor $\mathbf{b} \in R^3$, og det skjer hvis og bare hvis A er ikke-singulær.

La oss derfor finne redusert trappeformen av A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 9 & 7 \\ 2 & 9 & 11 \end{bmatrix} \overset{R_3-2R_1}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 9 & 7 \\ 0 & 9 & 7 \end{bmatrix} \overset{R_3-R_2}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 9 & 7 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Okei, jeg er ikke helt i mål med trappeform, men det er nærme nok for mine formål.

Vi ser fra trappeformen at A har rang 2, og dermed er singulær. Altså er T_A ikke surjektiv.