MA1201/MA6201
Høsten 2016

Løsningsforslag — Øving 6

Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematikk

Med forebehold om feil. Hvis du finner en, ta kontakt med Karin.

Kapittel 3.3

$\boxed{3}$ **a)** Vi bruker teorem 3.4. La A være en 3×3-matrise som har de oppgitte vektorene som kolonnevektorer; da er A ikke-singulær hvis og bare hvis de oppgitte vektorene er en basis. (Merk at vi bare kan gjøre dette når vi har n vektorer, som vi vil sjekke om er en basis for $\mathbb{R}^n$!). Vi utfører Gauss-eliminasjon på A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 5 & 3 \end{bmatrix} \overset{\substack{R_2 - 2R_1 \\ R_3 - R_1}}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{bmatrix} \overset{R_2 \leftrightarrow R_3}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{3}R_2}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi ser at A er singulær, altså danner de oppgitte vektorene *ikke en basis* for $\mathbb{R}^3$.

b) Dette er *ikke en basis* for $\mathbb{R}^3$, fordi vektorene ikke er lineært uavhengige:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix} + 0 \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

c) Hvis de oppgitte vektorene skal være en basis for $\mathbb{R}^4$, så må vi kunne skrive alle vektorer i $\mathbb{R}^4$ som en lineær kombinasjon av de oppgitte vektorene. Vi prøver om vi kan skrive $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ som en lineær kombinasjon, det vil si om vi kan finne x og y og z slik at

$$x \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + y \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + z \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Å løse denne ligningen tilsvarer å løse systemet

$$\begin{cases} x \qquad + \ z = 0 \\ \qquad y + \ z = 0 \\ 2x + y + 4z = 0 \\ 3x + y + 4z = 1 \end{cases}$$

Og det begynner vi å bli proffe på å løse!

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 1 \end{array}\right] \overset{\substack{R_3 - 2R_1 \\ R_4 - 3R_1}}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right] \overset{\substack{R_3 - R_2 \\ R_4 - R_2}}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Vi ser at vi ikke har et konsistent system, slik at $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ ikke er i rommet utspent av de tre vektorene. Dermed er dette *ikke en basis* for $\mathbb{R}^4$.

d) Her gjør vi som på oppgave a, og sjekker om matrisen som har de oppgitte vektorene som kolonnevektorer er singulær:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \end{bmatrix} \overset{\substack{R_3-2R_1 \\ R_4-3R_1}}{\rightsquigarrow} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{bmatrix} \overset{\substack{R_3-R_2 \\ R_4-R_2}}{\rightsquigarrow} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Vi ser at A har full rang; altså at den er ikke-singulær. Dermed utgjør de oppgitte vektorene en *basis for* $\mathbb{R}^4$.

$\boxed{4}$ **a)** Vi bruker sjekk-at-matrisen-er-ikke-singulær-metoden igjen for å sjekke at vi har en basis. Her blir $A = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 5 \end{smallmatrix}\right]$, som er en 2×2-matrise, og da husker vi fra side 106 i boka at den er ikkesingulær hvis og bare hvis $2 \cdot 5 - 3 \cdot 3 = 1$ er ulik null. Altså danner $\mathbf{v}_1 = \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right]$ og $\mathbf{v}_2 = \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 5 \end{smallmatrix}\right]$ en basis.

Når vi skal finne koordinatene x_1, x_2 til $\mathbf{b} = \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 4 \end{smallmatrix}\right]$ med hensyn på den oppgitte basisen, tilsvarer det å løse systemet

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 = A\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \mathbf{b}.$$

Inversen til A er

$$A^{-1} = \frac{1}{2 \cdot 5 - 3 \cdot 3}\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}.$$

Da får at

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = A^{-1}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} 5 & -3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Og vi dobbeltsjekker svaret:

$$x_1\mathbf{v}_1 + x_2\mathbf{v}_2 = 3\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix} = \mathbf{b}.$$

c) Med samme metode finner vi at

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \overset{R_3-R_2}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \overset{R_3 \leftrightarrow R_2}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \overset{R_3-R_2}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi ser at A er ikke-singulær, og dermed utgjør kolonnevektorene i A (som er vektorene vi har får oppgitt) en basis. For å finne koordinatene x_1, x_2, x_3 til $\mathbf{b} = \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$, løser vi systemet $A\left[\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right] = \mathbf{b}$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \overset{R_3-R_2}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right] \overset{R_3 \leftrightarrow R_2}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\overset{R_3-R_2}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right]$$

Vi ser at vi har løsningen $x_1 = 3$, $x_2 = -2$ og $x_3 = 2$ (kontrollregning er fint!).

$\boxed{5}$ **b)** La oss begynne med å radredusere A til R:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \overset{\substack{R_2-2R_1 \\ R_3-R_1}}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix} \overset{-1\cdot R_2}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\overset{R_3+2R_2}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{R_1-R_2}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$$

En basis for radrommet $\mathbf{R}(A)$ er gitt ved de ikke-null radvektorene i R, nemlig

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

En basis for nullrommet finner vi ved først å observere at en generell løsning av $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ er gitt ved $x_1 = -x_3$ og $x_2 = x_3$, slik at $\mathbf{x} = s \left[\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$. En basis for $\mathbf{N}(A)$ er altså gitt ved $\mathbf{n} = \left[\begin{smallmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$.

Basis for kolonnerommet er gitt av kolonnene i A der tilsvarende kolonne i R inneholder pivotelementer (ledende ettall). Slik får vi basis for kolonnerommet gitt av

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Den eneste raden med nuller i R fikk vi fra $\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_1 - 2(\mathbf{a}_2 - 2\mathbf{a}_1) = 3\mathbf{a}_1 - 2\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_3$; altså er en basis for $\mathbf{N}(A^T)$ gitt ved $\mathbf{m} = \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$.

Merk at jeg ikke har vist at vektorene vi finner i hver basis er lineært uavhengige, men et argument tilsvarende det i eksempel 10 vil føre fram.

d) Vi følger fremgangsmåten i forrige punkt.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & -1 & -1 \end{bmatrix} \overset{R_2-2R_1}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \overset{R_1+R_2}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} = R$$

En basis for radrommet blir da gitt ved

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

$A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ har generell løsning $\mathbf{x} = s \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right] + t \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right]$, med $s, t \in \mathbb{R}$, slik at basis for nullrommet er gitt av

$$\mathbf{n}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{n}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Basis for kolonnerommet er gitt av kolonnene i A der tilsvarende kolonne i R inneholder pivotelementer (ledende ettall). Da får vi

$$\mathbf{c}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{c}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Det venstre nullrommet $\mathbf{N}(A^T)$ er et trivielt underrom av $\mathbb{R}^2$, og har således ikke en basis.

$\boxed{18}$ Dersom $c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k = \mathbf{0}$, har vi også at

$$0 = A\mathbf{0} = A(c_1\mathbf{v}_1 + \cdots + c_k\mathbf{v}_k) = c_1A\mathbf{v}_1 + \cdots + c_kA\mathbf{v}_k.$$

Siden $A\mathbf{v}_1, \cdots, A\mathbf{v}_n$ er lineært uavhengige, må vi ha $c_1 = \cdots = c_k = 0$. Dermed må vi ha at $\mathbf{v}_1, \cdots \mathbf{v}_n$ er lineært uavhengige.

$\boxed{22}$ Anta at

$$c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}.$$

Da har vi også at

$$\mathbf{0} = A(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3) = c_1\mathbf{v}_1 + 2c_2\mathbf{v}_2 + 3c_3\mathbf{v}_3$$

og

$$\mathbf{0} = A^2(c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3) = c_1\mathbf{v}_1 + 4c_2\mathbf{v}_2 + 9c_3\mathbf{v}_3,$$

ellers samlet:

$$\begin{aligned} c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 &= \mathbf{0} \\ c_1\mathbf{v}_1 + 2c_2\mathbf{v}_2 + 3c_3\mathbf{v}_3 &= \mathbf{0} \\ c_1\mathbf{v}_1 + 4c_2\mathbf{v}_2 + 9c_3\mathbf{v}_3 &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Om vi trekker den første ligningen fra de to neste, får vi følgende ekvivalente system:

$$\begin{aligned} c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 &= \mathbf{0} \\ c_2\mathbf{v}_2 + 2c_3\mathbf{v}_3 &= \mathbf{0} \\ 3c_2\mathbf{v}_2 + 8c_3\mathbf{v}_3 &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Og ved å trekke andre ligning multiplisert med tre fra tredje ligning får vi:

$$\begin{aligned} c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + c_3\mathbf{v}_3 &= \mathbf{0} \\ c_2\mathbf{v}_2 + 2c_3\mathbf{v}_3 &= \mathbf{0} \\ 2c_3\mathbf{v}_3 &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

Siden $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ alle er ulike null, får ut av dette at $c_1 = c_2 = c_3 = 0$. Altså er $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ lineært uavhengige.

Kapittel 3.4

$\boxed{1}$ **b)** Vi ser at V tilsvarer nullrommet til matrisen $A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$. La oss radredusere A (det går fort):

$$A = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] \overset{R_1 - R_2}{\rightsquigarrow} \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right] = R$$

Vi ser at $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ medfører at $\mathbf{x} = s \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right] + t \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$, slik at en basis for V er

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$$

Dimensjonen til V er 2.

c) Vi kan begynne med å observere at en vektor $\mathbf{x}$ er i $\operatorname{Span}\left(\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right]\right)^{\perp}$ hvis og bare hvis $\mathbf{x} \cdot \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right] = 0$.

Hvis vi sier at $\mathbf{x} = \left[\begin{smallmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{smallmatrix}\right]$, vil det si at $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 0$, eller $x_1 = -2x_2 - 3x_3$.

Altså er $\mathbf{x} \in \operatorname{Span}\left(\left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right]\right)^{\perp}$ hvis og bare hvis $x = s \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right] + t \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$, og en basis for V er gitt ved $\left\{ \left[\begin{smallmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right], \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{smallmatrix}\right] \right\}$.

Dimensjonen til V er 2.

$\boxed{3}$ Planen vår for $m \times n$-matrisa A å utføre radreduksjonene $[A \mid I_m] \rightsquigarrow [U \mid E]$, der U er trappeformen til A. Da vil vi få at $U = A \cdot E$. Etter det bruker vi teorem 4.5, side 160 i boka.

Jeg har hoppet over sjekk av dimensjon og ortogonalitet, men hvis du vil gjøre det, bør du sjekke at:

- $\dim \mathbf{R}(A) = \dim \mathbf{C}(A)$,
- $\dim \mathbf{R}(A) + \dim \mathbf{N}(A) = n$
- $\dim \mathbf{C}(A) + \dim \mathbf{N}(A)^{\perp} = m$
- Basisvektorene i radrommet er ortogonale på basisvektorene i nullrommet
- Basisvektorene i kolonnerommet er ortogonale på basisvektorene i det venstre nullrommet

a)

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 6 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{R_2 - 2R_1}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|cc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] = [U \mid E] = [R \mid B].$$

Vi ser nå at

- $\mathbf{R}(A)$ har basis $\left\{ \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{smallmatrix}\right] \right\}$.
- $\mathbf{C}(A)$ har basis $\left\{ \left[\begin{smallmatrix} 1 \\ 2 \end{smallmatrix}\right] \right\}$.

- $\mathbf{N}(A)$ har basis $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.
- $\mathbf{N}(A^T)$ har basis $\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$.

b)

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{\substack{\frac{1}{3}\cdot R_3, \\ R_3 \leftrightarrow R_1}}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1/3 \\ 4 & 3 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\overset{\substack{R_2 - 4R_1 \\ R_3 - 2R_1}}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -4/3 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 & -2/3 \end{array}\right] \overset{R_3 - R_2}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 1 & -4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2/3 \end{array}\right]$$

$$\overset{-R_2}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1/3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -4/3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 2/3 \end{array}\right] = [U \mid E]$$

Vi ser nå at

- $\mathbf{R}(A)$ har basis $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$.
- $\mathbf{C}(A)$ har basis $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \right\}$.
- $\mathbf{N}(A)$ har basis $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$.
- $\mathbf{N}(A^T)$ har basis $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ \frac{2}{3} \end{bmatrix} \right\}$.

c)

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{R_2 - 2R_1}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{cccc|cc} 1 & -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \end{array}\right] = [U \mid E]$$

Vi ser nå at

- $\mathbf{R}(A)$ har basis $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$.
- $\mathbf{C}(A)$ har basis $\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} \}$.
- $\mathbf{N}(A)$ har basis $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$.
- $\mathbf{N}(A^T)$ er det trivielle underrommet $\{\mathbf{0}\}$, og har således ikke en basis.

d)

$$[A \mid I] = \left[\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\rightsquigarrow}{\substack{R_2-R_1 \\ R_4+R_1}} \left[\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\rightsquigarrow}{R_3-2R_2} \left[\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\underset{\rightsquigarrow}{R_4\leftrightarrow R_3} \left[\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 2 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\underset{\rightsquigarrow}{R_4-2R_3} \left[\begin{array}{ccccc|cccc} 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$= [U \mid E]$$

Vi ser nå at

- $\mathbf{R}(A)$ har basis $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$.
- $\mathbf{C}(A)$ har basis $\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.
- $\mathbf{N}(A)$ har basis $\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$.
- $\mathbf{N}(A^T)$ har basis $\left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$.

4 En vektor $\mathbf{x}$ ligger i snittet av undermengdene hvis og bare hvis den kan skrives som en lineærkombinasjon av basisvektorene for hver undermangde, det vil si:

$$\mathbf{x} = a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ og } \mathbf{x} = c \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + d \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Vi setter sammen disse utrykkene og samler variablene, for å se hva $\mathbf{x}$ kan være:

$$a \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - c \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - d \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \mathbf{0}$$

Men dette kan settes opp som et ligningsystem $A \begin{bmatrix} a \\ b \\ -c \\ -d \end{bmatrix} = \mathbf{0}$, som vi etterhvert er blitt gode på å løse:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \overset{\substack{R_3-R_1 \\ R_4-R_1}}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \overset{R_3+R_2}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi setter $d = t$ som fri variabel og omformer tilbake til ligninger. Da ser vi at

$$\begin{aligned} -2c + d = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad c = \frac{1}{2}t \\ b - c = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad b = \frac{1}{2}t \\ a + 2b - 2d = 0 \qquad &\Rightarrow \qquad a = t \end{aligned}$$

Som medfører at

$$\mathbf{x} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2}t \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 2 \\ 1/2 \\ 3/2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$\boxed{7}$ Vi observerer først at

$$A = \mathbf{u}\mathbf{v}^T = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 & \cdots v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1v_1 & \cdots & u_1v_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ u_mv_1 & \cdots & u_mv_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1\mathbf{v}^T \\ \vdots \\ u_m\mathbf{v}^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1\mathbf{u} \cdots v_n\mathbf{u} \end{bmatrix}.$$

Fra dette kan vi ganske greit lese ut at $\mathbf{C}(A) = \operatorname{Span} \mathbf{u}$ og $\mathbf{R}(A) = \operatorname{Span} \mathbf{v}$. Videre har vi at

$$\mathbf{N}(A) = \mathbf{R}(A)^\perp = \{\mathbf{x} \in R^m | \mathbf{v} \cdot \mathbf{x} = 0\}$$

og

$$\mathbf{N}(A^T) = \mathbf{C}(A)^\perp = \{\mathbf{x} \in R^n | \mathbf{u} \cdot \mathbf{x} = 0\}$$

Eksamen 2014

$\boxed{2}$ **c)** Vi skal vise at to ortogonale, ikke-null vektorer er lineært uavhengige. Her er det lettere å se på den omvendte implikasjonen: To ikke-null lineært avhengige vektorer kan ikke være ortogonale[1].

Anta derfor at vektorene $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ er ikke-null vektorer som er lineært avhengige, slik at $a\mathbf{u} + b\mathbf{v} = 0$, med minst en av a og b ulik null. Vi kan anta at $a \neq 0$. Da er $\mathbf{u} = -\frac{b}{a}\mathbf{v}$. Dermed er $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = -\frac{b}{a}\mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = -\frac{b}{a}\|\mathbf{v}\|$. Hvis $b = 0$, så har vi at $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, som går imot den opprinnelige antagelsen vår. Siden $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, har vi at $\|\mathbf{v}\| \neq 0$. Altså er $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \neq 0$, så $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er ikke ortogonale vektorer.

[1] Det viser at hvis $\mathbf{u}$ og $\mathbf{v}$ er ortogonale, så kan de ikke være lineært avhengige, for hadde de vært lineært avhengige, så kunne ikke være ortogonale...