MA1201/MA6201
Høsten 2016

Løsningsforslag — Øving 7

Med forebehold om feil. Hvis du finner en, ta kontakt med Karin.

Kapittel 3.4

$\boxed{8}$ Vi benevner matrisen vi skal frem til i denne oppgaven A. Vi antar at A er en $m \times n$-matrise

b) Vi vet fra teorem 4.6, s 164, at $\dim \mathbf{N}(A) + \dim \mathbf{R}(A) = n$, og videre at i dette tilfellet er $n = 3$ (lengden av radvektorene er lik antall kolonner!). Siden de tre vektorene er lineært uavhengige (sjekk gjerne), må vektorene som skal være i nullrommet utgjøre en basis for nullrommet, og vektoren i radrommet utgjøre en basis for radrommet.
Siden $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ er en basis for radrommet, er matrisen på formen

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_1 & -a_1 \\ a_2 & a_2 & -a_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_m & a_m & -a_m \end{bmatrix},$$

med $a_i \neq 0$ for minst en i.
Videre kan vi raskt sjekke at en slik matrise A vil ha de to vektorene som er oppgitt i oppgaven i nullrommet sitt. Dermed er for eksempel $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & -2 \end{bmatrix}$ en løsning av oppgaven.

d) Her ser vi fra lengden på vektorene i kolonne- og nullrommet at $m = n = 2$. Siden kolonnerommet har basis $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, må A være på formen $\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, der minst en av a og b er ulik null.
Videre skal $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ være en nullvektor, slik at

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

og dermed må $a = 0$, $b \neq 0$.
Dermed er for eksempel $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ en løsning på oppgaven.

$\boxed{11}$ **a)** Basisen for $\mathbf{R}(A)$ er $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{u}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$. Videre ser vi at $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$ betyr at $x_1 = x_2 = t$ og $x_3 = x_4 = s$, slik at $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} t \\ t \\ s \\ s \end{bmatrix}$. Dermed er en basis for $\mathbf{N}(A)$ gitt av $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

La $\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}$ være vektoren i oppgaven; Vi skal finne $\mathbf{u} = a\mathbf{u}_1 + b\mathbf{u}_2$ og $\mathbf{v} = c\mathbf{v}_1 + d\mathbf{v}_2$ for (her bruker vi basisvektorene vi akkurat fant!). Vi kan bruke gausseliminasjon for å finne a, b, c, d:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & x_1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & x_2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & x_3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & x_4 \end{array}\right] \underset{\rightsquigarrow}{\substack{R_2+R_1 \\ R_4+R_3}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & x_1 + x_2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & x_3 + x_4 \end{array}\right]$$

$$\underset{\rightsquigarrow}{\substack{\frac{1}{2}R_2 \\ \frac{1}{2}R_4}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \\ 0 & 1 & 0 & 1 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}(x_3 + x_4) \end{array}\right] \underset{\rightsquigarrow}{\substack{R_1-R_2 \\ R_3-R_4}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(x_1 - x_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2}(x_1 + x_2) \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2}(x_3 - x_4) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2}(x_3 + x_4) \end{array}\right]$$

Altså får vi $a = \frac{1}{2}(x_1 - x_2)$, $b = \frac{1}{2}(x_3 - x_4)$, $c = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$ og $\frac{1}{2}(x_3 + x_4)$

b) La $\mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$. Vi ønsker å finne en $\mathbf{x} \in \mathbf{R}(A)$, det vil si en vektor $\mathbf{x}$ på formen

$$\mathbf{x} = c_1\mathbf{u}_1 + c_2\mathbf{u}_2 = \begin{bmatrix} c_1 \\ -c_1 \\ c_2 \\ -c_2 \end{bmatrix},$$

slik at $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$. La oss regne litt...

$$Ax = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ -c_1 \\ c_2 \\ -c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2c_1 \\ 2c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}.$$

Altså har vi at $c_1 = \frac{1}{2}b_1$ og $c_2 = \frac{1}{2}b_2$. Dermed er $x = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} b_1 \\ -b_1 \\ b_2 \\ -b_2 \end{bmatrix}$.

$\boxed{23}$ **a)** La $\mathbf{b}_1, \cdots, \mathbf{b}_n$ være kolonnevektorene i B. Da kan vi skrive $AB = \begin{bmatrix} A\mathbf{b}_1 & \cdots & A\mathbf{b}_n \end{bmatrix}$ (se side 84 i boka).

Dersom $\mathbf{C}(B) \subseteq \mathbf{N}(A)$ må spesielt alle kolonnevektorer i B være i nullrommet til A, og dermed er

$$AB = \begin{bmatrix} A\mathbf{b}_1 & \cdots & A\mathbf{b}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} = O$$

På den andre siden, dersom $AB = O$, så må vi ha at $\begin{bmatrix} A\mathbf{b}_1 & \cdots & A\mathbf{b}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}$, det vil si at enhver kolonnevektor av B er i nullrommet til A. Da må enhver lineærkombinasjon av kolonnevektorene til B være i nullrommet til A, og følgelig er $\mathbf{C}(B) \subseteq \mathbf{N}(A)$.

b) Hvis A og B er 3×3-matriser av rang 2, så har $\mathbf{C}(B)$ dimensjon 2, mens $\mathbf{N}(A)$ har dimensjon $3 - 2 = 1$.

Altså har $\mathbf{C}(B)$ to basisvektorer, mens $\mathbf{N}(A)$ har en. Dersom $\mathbf{C}(B) \subseteq \mathbf{N}(A)$, så må de to basisvektorene til $\mathbf{C}(B)$ være inneholdt i $N(A)$, og dermed multipler av den ene basisvektoren til $N(A)$. Da kan de ikke være lineært uavhengige. Det følger at $\mathbf{C}(B)$ ikke er inneholdt i $\mathbf{N}(A)$.[1]

[1] Dette argumentet kan generaliseres: Om $U \subseteq V$, så er $\dim U \leq \dim V$.

c) AB kan ikke ha rang 3 eller 0. Da står vi igjen med følgende muligheter:

rank $AB = 1$ Dette oppnås hvis f.eks $A = \begin{bmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&0 \end{bmatrix}$ og $B = \begin{bmatrix} 0&0&0\\0&1&0\\0&0&1 \end{bmatrix}$.

rank $AB = 2$ Dette oppnås hvis f.eks $A = B = \begin{bmatrix} 1&0&0\\0&1&0\\0&0&0 \end{bmatrix}$.

Merknad: Hvorfor gir vi oppgaver med å finne eksempler? Det er flere grunner til det, men i dag vil jeg nevne en spesielt: Det er et kjempenyttig verktøy å ha i den matematiske verktøykassen. Hvis du er i tvil om noe stemmer, så tenk på hvor du tror det kan gå galt, og lag et eksempel som viser frem nettopp det.

Si at jeg hadde støtt på et teorem som sa at rank $AB = \min(\operatorname{rank} A, \operatorname{rank} B)$ - og syntes at noe var rart. Vel, med litt flaks hadde jeg tenkt at dette burde kunne motbevises med noen enkle matriser av ikke helt full rang, og så begynt å lete etter eksempler. Men å vite hvordan man skal finne de eksemplene, det er en kunst som man bare lærer seg ved å trene.

Kapittel 4.1

$\boxed{1}$ **a)** Normalvektoren til planet er $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 1\\1\\1 \end{bmatrix}$. Vektoren $\mathbf{n}$ utgjør en basis for $V^{\perp}$. Vi skal regne ut projeksjonen av $\mathbf{b}$ langs $\mathbf{n}$, men la oss for ryddighetens skyld først regne ut:

$$\mathbf{b}\cdot\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 2\\1\\1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1\\1\\1 \end{bmatrix} = 4 \qquad \|\mathbf{n}\|^2 = \mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 1\\1\\1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1\\1\\1 \end{bmatrix} = 3$$

Nå er vi klare til å regne ut projeksjonen av $\mathbf{b}$, via ligningen i boksen på side 192:

$$\operatorname{proj}_{V^{\perp}} \mathbf{b} = \operatorname{proj}_{\mathbf{n}} \mathbf{b} = \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2}\mathbf{n} = \frac{4}{3}\begin{bmatrix} 1\\1\\1 \end{bmatrix}.$$

Da får vi at

$$\operatorname{proj}_{V} \mathbf{b} = \mathbf{b} - \operatorname{proj}_{V^{\perp}} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 2\\1\\1 \end{bmatrix} - \frac{4}{3}\begin{bmatrix} 1\\1\\1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2\\-1\\-1 \end{bmatrix}.$$

c) Her følger vi samme fremgangsmåte som i punkt (a). Normalvektoren til planet er $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 1\\-1\\1\\2 \end{bmatrix}$. Vi har at

$$\mathbf{b}\cdot\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 1\\1\\1\\1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1\\-1\\1\\2 \end{bmatrix} = 3 \qquad \|\mathbf{n}\|^2 = \mathbf{n}\cdot\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 1\\-1\\1\\2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1\\-1\\1\\2 \end{bmatrix} = 7$$

Projeksjonen av $\mathbf{b}$ langs $\mathbf{n}$ blir:

$$\operatorname{proj}_{V^{\perp}} \mathbf{b} = \operatorname{proj}_{\mathbf{n}} \mathbf{b} = \frac{\mathbf{b}\cdot\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2}\mathbf{n} = \frac{3}{7}\begin{bmatrix} 1\\-1\\1\\2 \end{bmatrix}.$$

Da får vi at

$$\operatorname{proj}_V \mathbf{b} = \mathbf{b} - \operatorname{proj}_{V^\perp} \mathbf{b} = \begin{bmatrix}1\\1\\1\\1\end{bmatrix} - \frac{3}{7}\begin{bmatrix}1\\-1\\1\\2\end{bmatrix} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix}4\\10\\4\\1\end{bmatrix}.$$

7 La oss skrive dette systemet som

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -3\\2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\4\\3\end{bmatrix} = \mathbf{b}$$

Minste kvadraters løsning av systemet er løsningen av $A^TA\mathbf{x} = A^T\mathbf{b}$, så la oss bedrive litt mellomregning:

$$A^TA = \begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\1 & -3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -3\\2 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}6 & 0\\0 & 11\end{bmatrix}$$

$$A^T\mathbf{b} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\1 & -3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\4\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}11\\-8\end{bmatrix}$$

Altså skal vi løse systemet

$$\begin{bmatrix}6 & 0\\0 & 11\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}11\\-8\end{bmatrix}.$$

Det burde være tålelig greit å se at dette gir $x_1 = \frac{11}{6}$ og $x_2 = -\frac{8}{11}$.

Planet i oppgaven, V, er utspent av kolonnevektorene i A, dermed er $V = \mathbf{C}(A)$. Nå vil vi finne punktet i $\mathbf{C}(A)$ som er nærmest $\mathbf{b}$. Det vil si, finn $A\mathbf{x}$ som er nærmest mulig $\mathbf{b}$. Fra første del av oppgaven blir dette:

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & -3\\2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}{}^{11}/_{6}\\-{}^{8}/_{11}\end{bmatrix} = \frac{1}{66}\begin{bmatrix}73\\265\\194\end{bmatrix}.$$

14 La oss anta at vi jobber i $\mathbb{R}^n$; da vil A være en $n \times n$-matrise. Hvis $\operatorname{proj}_V = \mu_A$, så vil det si at for alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ er $\operatorname{proj}_V \mathbf{x} = \mu_A\mathbf{x} = A\mathbf{x}$.

Da har vi for enhver $\mathbf{x}$ at:

$$A^2\mathbf{x} = \operatorname{proj}_V(\operatorname{proj}_V \mathbf{x}) = \operatorname{proj}_V \mathbf{x} = A\mathbf{x},$$

der vi i den andre likheten bruker at $\operatorname{proj}_V \mathbf{y} = \mathbf{y}$ dersom $\mathbf{y} \in V$.

For den andre delen av oppgaven, se vi først på oppgave 2.5.24, som foreslått. Der lærer vi at A er symmetrisk (dvs $A = A^T$), hvis $A\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y}$ for alle vektorer $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$. Da gir det mening å vise at A oppfyller den betingelsen, slik oppgaven vår foreslår.

Vi vet fra definisjonen av projeksjon at hvis $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$, så kan vi skrive $\mathbf{x} = \mathbf{v_x} + \mathbf{u_x}$ og $\mathbf{y} = \mathbf{v_y} + \mathbf{u_y}$, der $\mathbf{v_x}, \mathbf{v_y} \in V$ og $\mathbf{u_x}, \mathbf{u_y} \in V^\perp$. Mer spesifikt er $\mathbf{v}_x = \operatorname{proj}_V \mathbf{x}$ og $\mathbf{v}_y = \operatorname{proj}_V \mathbf{y}$. Nå er vi klar til å sjekke den fine betingelsen vår! Husk at $A\mathbf{v} = \mathbf{v}$ for $\mathbf{v} \in V$ og $A\mathbf{u} = \mathbf{0}$ for $\mathbf{u} \in V^\perp$.

$$A\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = A(\mathbf{v_x} + \mathbf{u_x}) \cdot (\mathbf{v_y} + \mathbf{u_y}) = \mathbf{v_x} \cdot (\mathbf{v_y} + \mathbf{u_y}) = \mathbf{v_x} \cdot \mathbf{v_y}$$
$$\mathbf{x} \cdot A\mathbf{y} = (\mathbf{v_x} + \mathbf{u_x}) \cdot A(\mathbf{v_y} + \mathbf{u_y}) = (\mathbf{v_x} + \mathbf{u_x}) \cdot \mathbf{v_y} = \mathbf{v_x} \cdot \mathbf{v_y}$$

Så betingelsen stemmer, og A er symmetrisk.

$\boxed{15}$ Siden A har en tendens til å sende vektorer til kolonnerommet sitt, så velger jeg å anta at $V = \mathbf{C}(A)$. Da har vi definitivt at $A\mathbf{x} \in V$.

Så må vi ta en kikk på $V^\perp = \mathbf{C}(A)^\perp = N(A^T)$. En vektor er ortogonal til V hvis og bare hvis den ligger i $V^\perp$, det vil si hvis og bare hvis den ligger i nullrommet til A^T. Så la oss se på $\mathbf{x} - A\mathbf{x}$:

$$A^T(\mathbf{x} - A\mathbf{x}) = A^T\mathbf{x} + A^T A\mathbf{x} = A\mathbf{x} + A^2\mathbf{x} = A\mathbf{x} - A\mathbf{x} = \mathbf{0}$$

Og da er vi i mål! Vi definerer nemlig en projeksjonsmatrise som en matrise A slik at $\mu_A = \operatorname{proj}_V$, og her har vi vist at A har nettopp samme effekt som projeksjonen ned på V har på en vilkårlig vektor $\mathbf{x}$.

Merk også at med denne og forrige oppgave, har vi vist at A er en projeksjonsmatrise *hvis og bare hvis* $A^T = A$ og $A^2 = A$.

Eksamen Høst 2015

$\boxed{4}$ **a)** (i) Kolonnerommet til A er definert som underrommet utspent av kolonnevektorene til A

(ii) For å finne en basis for kolonnerommet starter vi med å radredusere A:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \overset{R_1 \leftrightarrow R_2}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & -1 \\ -3 & -2 & -1 \end{bmatrix} \overset{\substack{R_2 - 3R_1 \\ R_3 + 3R_1}}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -5 & -10 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$
$$\overset{-\frac{1}{5}R_2}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & 8 \end{bmatrix} \overset{R_3 - 4R_2}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$$

Siden pivotelementene i R står i første og andre kolonne, er en basis for $\mathbf{C}(A)$ gitt ved første og andre kolonnevektor i A, altså $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$.

(iii) $\dim \mathbf{C}(A) = 2$

b) Vi har altså at $\operatorname{Im} T_A = \{\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3 | \mathbf{b} = T_A(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} \text{ for en } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\}$. Vi sjekker kriteriene for underrom, men la oss først ta en kikk på hva en vilkårlig vektor i $\operatorname{Im} T_A$ ser ut som: La $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \operatorname{Im} T_A$, da kan vi skrive at $\mathbf{u} = A\mathbf{x}$ og $\mathbf{v} = A\mathbf{y}$, der $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$.
Siden $\mathbf{0} = A\mathbf{0}$, så er $\mathbf{0} \in \operatorname{Im} T_A$
La $c \in R$, da har vi at $cA\mathbf{x} = Ac\mathbf{x} \in \operatorname{Im} A$.
Videre ser vi at $A\mathbf{x} + A\mathbf{y} = A(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \in \operatorname{Im} T_A$.