Med forebehold om feil. Hvis du finner en, ta kontakt med Karin.

Kapittel 4.2

$\boxed{2}$ **a)** Her har vi

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}$$

Vi følger Gram-Schmidt-prosessen for å få en ortogonal basis $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3\}$.
Først setter vi $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$.
Så skal vi regne ut $\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w_1}\|^2}\mathbf{w}_1$, men det går enklere med litt mellomregning først:

$$\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = 2 \qquad \|\mathbf{w_1}\|^2 = 1$$

Så da får vi

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w_1}\|^2}\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix} - \frac{2}{1}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}.$$

Før vi regner ut $\mathbf{w}_3$, er det igjen lurt med litt mellomregning:

$$\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} = 3 \qquad \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = 2 \qquad \|\mathbf{w_2}\|^2 = 1$$

Og da er vi klare til å regne ut:

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w_1}\|^2}\mathbf{w}_1 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w_2}\|^2}\mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix} - \frac{3}{1}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix} - \frac{2}{1}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$$

Alle vektorene har allerede lengde 1, og vi har en ortonormal basis.

b) Et lurt triks her å velge en annen rekkefølge på vektorene enn den som er oppgitt i oppgaven. Et generelt triks: Sett vektorer av lengde 1 og med mange nuller først! Derfor velger vi her rekkefølgen

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}$$

Så følger vi algoritmen, og får først $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 = \left[\begin{smallmatrix}0\\0\\1\end{smallmatrix}\right]$.
Så bedriver vi litt mellomregning:

$$\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = 1 \qquad \|\mathbf{w_1}\|^2 = 1$$

og får

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w_1}\|^2}\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} - \frac{1}{1}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}.$$

Litt mer mellomregning gir oss

$$\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = 1 \qquad \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = 1 \qquad \|\mathbf{w_2}\|^2 = 1$$

og til slutt

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w_1}\|^2}\mathbf{w}_1 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w_2}\|^2}\mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} - \frac{1}{1}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} - \frac{1}{1}\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$$

Alle vektorene har allerede lengde 1, og vi har en ortonormal basis.

d) På denne oppgaven er det nok bare å akseptere at vektorene ikke er særlig pene.
Vi har altså

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix}-1\\2\\0\\2\end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}2\\-4\\1\\-4\end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix}-1\\3\\1\\1\end{bmatrix}$$

Så følger vi algoritmen, og får først $\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 = \left[\begin{smallmatrix}-1\\2\\0\\2\end{smallmatrix}\right]$.
Så bedriver vi litt mellomregning:

$$\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix}2\\-4\\1\\-4\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}-1\\2\\0\\2\end{bmatrix} = -18 \qquad \|\mathbf{w_1}\|^2 = 1^2 + 2^2 + 2^2 = 9$$

og får

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w_1}\|^2}\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix}2\\-4\\1\\-4\end{bmatrix} - \frac{-18}{9}\begin{bmatrix}-1\\2\\0\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\-4\\1\\-4\end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix}-1\\2\\0\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix}.$$

(verden er snill med oss i blandt!)
Litt mer mellomregning gir oss

$$\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix}-1\\3\\1\\1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}-1\\2\\0\\2\end{bmatrix} = 9 \qquad \mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix}-1\\3\\1\\1\end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix}0\\0\\1\\0\end{bmatrix} = 1 \qquad \|\mathbf{w_2}\|^2 = 1$$

og til slutt

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w_1}\|^2}\mathbf{w}_1 - \frac{\mathbf{v}_3 \cdot \mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w_2}\|^2}\mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{9}{9}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} - \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Til slutt normaliserer vi vektorene og får

$$\mathbf{w}_1' = \frac{\mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w_1}\|} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{w}_2' = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{w}_3' = \frac{\mathbf{w}_3}{\|\mathbf{w_3}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$\boxed{3}$ **a)** Vi finner en ortogonal basis på den eneste måten vi vet om, nemlig ved å bruke Gram-Schmidt, med $\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

$$\mathbf{w}_1 = \mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{v}_2 - \frac{\mathbf{v}_2 \cdot \mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w_1}\|^2}\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{3 \cdot 2 + 3 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot (-2)}{2^2 + 1^2 + (-2)^2}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{9}{9}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

b) Se på proposisjon 4.2.3. Vi har en ortogonal basis for V gitt ved $\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$. Vi utfører litt mellomregninger vi kommer til å få bruk for:

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \\ -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} = 4 + 14 = 18 \qquad \|\mathbf{w_1}\|^2 = 2^2 + 1^2 + (-2)^2 = 9$$

$$\mathbf{b} \cdot \mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \\ -7 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = 8 - 4 - 14 = -10 \quad \|\mathbf{w_2}\|^2 = 1^2 + 2^2 + 1^2 + 2^2 = 10$$

og bruker formelen i proposisjonen:

$$\mathrm{proj}_V\, \mathbf{b} = \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{w}_1}{\|\mathbf{w_1}\|^2}\mathbf{w}_1 + \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{w}_2}{\|\mathbf{w_2}\|^2}\mathbf{w}_1 = \frac{18}{9}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix} + \frac{-10}{10}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \\ -6 \end{bmatrix}.$$

c) La A være matrisen med $\mathbf{w}_1$,$\mathbf{w}_2$ som kolonnevektorer:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Vi normaliserer kolonnevektorene for å få den ortogonale matrisen Q med samme kolonnerom som A:

$$Q = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/\sqrt{10} \\ 1/3 & 2/\sqrt{10} \\ 0 & 1/\sqrt{10} \\ -2/3 & 2/\sqrt{10} \end{bmatrix}$$

Da er projeksjonsmatrisen P_V gitt ved (se side 206)

$$P_V = QQ^T = \begin{bmatrix} 2/3 & 1/\sqrt{10} \\ 1/3 & 2/\sqrt{10} \\ 0 & 1/\sqrt{10} \\ -2/3 & 2/\sqrt{10} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 & 1/3 & 0 & -2/3 \\ 1/\sqrt{10} & 2/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} & 2/\sqrt{10} \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{90} \begin{bmatrix} 49 & 38 & 9 & -22 \\ 38 & 46 & 18 & 16 \\ 9 & 18 & 9 & 18 \\ -22 & 16 & 18 & 76 \end{bmatrix}$$

$\boxed{6}$ **a)** En basis er gitt ved

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}}{\| \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^T \|^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Vi velger i stedet å bruke $\mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, for enklere regning (dette er igjen en basisvektor).

b) En basis for $V^\perp$ kan vi finne ved å ta to lineært uavhengige vektorer $\mathbf{v}_3$ og $\mathbf{v}_4$ som ikke er inneholdt i V, og bruke de til å utvide den ortogonale basisen $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2\}$ til V til en ortogonal basis $\{\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$ for $\mathbb{R}^4$. Da vil $\{\mathbf{w}_3, \mathbf{w}_4\}$ være en basis for $V^\perp$ (vektorene vil være lineært uavhengige, innehold i $V^\perp$, og dimensjonen stemmer).

Vi velger $\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\mathbf{v}_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$. (Husk at når vi kan velge, så kan vi godt gjøre det enkelt for oss selv!)

Da får vi

$$\mathbf{w}_3 = \mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{v}_3}{\|\mathbf{w_1}\|^2}\mathbf{w}_1 - \frac{\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{v}_3}{\|\mathbf{w_2}\|^2}\mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\end{bmatrix} - \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix} - \frac{-1}{15}\begin{bmatrix}-1\\3\\-1\\2\end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix}3\\1\\-2\\-1\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_4 &= \mathbf{v}_4 - \frac{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{v}_4}{\|\mathbf{w_1}\|^2}\mathbf{w}_1 - \frac{\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{v}_4}{\|\mathbf{w_2}\|^2}\mathbf{w}_2 - \frac{\mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{v}_4}{\|\mathbf{w_3}\|^2}\mathbf{w}_3 \\ &= \begin{bmatrix}0\\5\\0\\0\end{bmatrix} - \frac{0}{3}\begin{bmatrix}1\\0\\1\\1\end{bmatrix} - \frac{15}{15}\begin{bmatrix}-1\\3\\-1\\2\end{bmatrix} - \frac{5}{3}\cdot\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3\\1\\-2\\-1\end{bmatrix} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix}0\\5\\5\\-5\end{bmatrix}\end{aligned}$$

Men for å få enklere regning fremover, velger vi gjerne vektorene $\mathbf{w}_3 = \left[\begin{smallmatrix}3\\1\\-2\\-1\end{smallmatrix}\right]$ og $\mathbf{w}_4 = \left[\begin{smallmatrix}0\\1\\1\\-1\end{smallmatrix}\right]$

Det er ikke overraskende klokt å kontrollregne her.

c)

$$\mathbf{v} = \frac{\mathbf{w}_1 \cdot \mathbf{x}}{\|\mathbf{w_1}\|^2}\mathbf{w}_1 + \frac{\mathbf{w}_2 \cdot \mathbf{x}}{\|\mathbf{w_2}\|^2}\mathbf{w}_2 \qquad \mathbf{w} = \frac{\mathbf{w}_3 \cdot \mathbf{x}}{\|\mathbf{w_3}\|^2}\mathbf{w}_3 + \frac{\mathbf{w}_4 \cdot \mathbf{x}}{\|\mathbf{w_4}\|^2}\mathbf{w}_3$$

$\boxed{11}$ **a)** Vi observer at dersom $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n$ danner en ortonormal mengde, så har vi at

$$\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_j = \begin{cases}1 & \text{hvis } i = j \\ 0 & \text{ellers}\end{cases}.$$

La oss se på

$$\begin{aligned}A^T \cdot A &= \begin{bmatrix}\mathbf{a}_1^T\\ \vdots \\ \mathbf{a}_i \\ \vdots \\ \mathbf{a}_n^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_j \cdots & \mathbf{a}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{a}_1 \cdot \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_1\mathbf{a}_j & \cdots & \mathbf{a}_1\mathbf{a}_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_i\mathbf{a}_j & \cdots & \mathbf{a}_i\mathbf{a}_n \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \mathbf{a}_n \cdot \mathbf{a}_1 & \cdots & \mathbf{a}_n\mathbf{a}_j & \cdots & \mathbf{a}_n\mathbf{a}_n\end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix}1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix} = I\end{aligned}$$

Altså er $A^T A = I$, så $A^T = A^{-1}$. (Husk at inversen, der den eksisterer, er unik for kvadratiske matriser.)

Kapittel 4.3

$\boxed{5}$ **a)** Vi ser på proposisjon 4.3.2, og spesielt merknaden under. I denne oppgaven er $P = \left[\begin{smallmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{smallmatrix}\right]$ og dermed er $P^{-1} = \frac{1}{1}\left[\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{smallmatrix}\right] = \left[\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{smallmatrix}\right]$

$$
\begin{aligned}
[T]_{\mathcal{B}} = P^{-1}[T]_{stand}P &= \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 12 \\ 1 & -19 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 36 & 24 \\ -55 & -37 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

b) Her har vi altså at $[S]_{\mathcal{B}} = \left[\begin{smallmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{smallmatrix}\right]$. Da kan vi finne standardmatrisen!

$$
\begin{aligned}
[S]_{stand} = P[S]_{\mathcal{B}}P^{-1} &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 8 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & -3 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}.
\end{aligned}
$$

$\boxed{9}$ **a)** Her vil jeg si at det er enklest å først finne $\mathbf{v}_3$, siden vi kan ta normalvektoren til planet:

$$
\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}
$$

Så velger vi oss $\mathbf{u}_1$ og $\mathbf{u}_2$, slik at $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_3$ danner en lineært uavhengig mengde. Når bruker Gram-Schmidt på denne mengden, med $\mathbf{v}_3$ som første vektor, får vi vektorer $\mathbf{v}_1$ og $\mathbf{v}_2$ som er i planet og er ortogonale til hverandre (og $\mathbf{v}_3$). Vi velger å bruke $\mathbf{u}_1 = \left[\begin{smallmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$ og $\mathbf{u}_2 = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{smallmatrix}\right]$, for å få litt finere tall å regne med.

$$
\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= \mathbf{u}_1 - \frac{\mathbf{u}_1 \cdot \mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v_3}\|^2}\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{-3}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \\
\mathbf{v}_2 &= \mathbf{u}_2 - \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v_3}\|^2}\mathbf{v}_3 - \frac{\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v_1}\|^2}\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{bmatrix} - \frac{3}{3}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \frac{3}{6}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}
\end{aligned}
$$

Men for enkelhets skyld regner vi videre med $\mathbf{v}_2 = \left[\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{smallmatrix}\right]$

b) Hva gjør T med vektorene $\mathbf{v}_1$, $\mathbf{v}_2$ og $\mathbf{v}_3$? La oss sjekke!

$$
T(\mathbf{v}_1) = \mathbf{v}_1 \qquad T(\mathbf{v}_2) = \mathbf{v}_2 \qquad T(\mathbf{v}_3) = -\mathbf{v}_3
$$

Om vi kaller basisen i del a for $\mathcal{B}$, så ser vi at

$$
[T]_{\mathcal{B}} = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{smallmatrix}\right]
$$

c) Vi regner først ut $P^{-}1$, der P er matrisen $P = [\,\mathbf{v}_1\ \mathbf{v}_2\ \mathbf{v}_3\,]$:

$$[P|I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \overset{R_1 \leftrightarrow R_2}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{\substack{R_2-2R_1 \\ R_3-R_1}}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \overset{R_3-R_2}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

$$\overset{\frac{1}{3}R_3}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right] \overset{\substack{R_1-R_3 \\ R_2+3R_3}}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right]$$

$$\overset{-\frac{1}{2}R_2}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1/3 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right] \overset{R_1-R_2}{\rightsquigarrow} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1/3 & 1/6 & 1/6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -1/3 & 1/3 & 1/3 \end{array}\right] = [I|P^{-1}]$$

Altså har vi

$$P = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

(Ja, jeg synes dere skal kontrollregne her!)

Nå er vi klare til å finne standardmatrisen:

$$[T]_{stand} = P[T]_{\mathcal{B}}P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 4 & 2 & -4 \\ 4 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

Merk at $[T]_{stand}$ blir den samme uansett hvilken basis du valgte i (a).

$\boxed{12}$ I denne oppgaven er det lurt å først finne en basis $\mathcal{B}$ for $\mathbb{R}^3$ slik som i oppgave 9 og finne bytte-basis-matrisen Q og dens invers. De tre transformasjonene er nemlig betydelig mye enklere å uttrykke i $\mathcal{B}$, og så transformere til en standardmatrise.

For basisen $\mathcal{B}$ velger vi

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Jeg bare observer det denne gangen (finn ortogonale to vektorer i V, samt normalvektoren til V), men du kan også bruke Gram-Schmidt. Da får vi $Q = \left[\begin{smallmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{smallmatrix}\right]$. Nå kan vi bruke radeliminasjon for å finne inversen, eller så kan vi være lure: $Q = EP$, der E er elementærmatrisen $E = \left[\begin{smallmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix}\right]$ og P er matrisen fra oppgave 9. Da er

$$Q^{-1} = (EP)^{-1} = P^{-1}E^{-1} = P^{-1}E = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

(fikk du lyst til å kontrollregne? sikkert ikke dumt!)

a) La oss se hva projeksjon på V gjør med basisvektorene:

$$\operatorname{proj}_V \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1 \qquad \operatorname{proj}_V \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 \qquad \operatorname{proj}_V \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$$

Dermed er $[\operatorname{proj}_V]_{\mathcal{B}} = \left[\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{smallmatrix}\right]$, og vi får at at

$$\begin{aligned}
[\operatorname{proj}_V]_{stand} = Q[\operatorname{proj}_V]_{\mathcal{B}}Q^{-1} &= \begin{bmatrix}1&1&1\\2&0&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{bmatrix}\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1&2&1\\3&0&-3\\2&-2&2\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{6}\begin{bmatrix}1&1&0\\2&0&0\\1&-1&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&1\\3&0&-3\\2&-2&2\end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}4&2&-2\\2&4&2\\-2&2&4\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{3}\begin{bmatrix}2&1&-1\\1&2&1\\-1&1&2\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

b) La oss se hva refleksjon om planet gjør med basisvektorene:

$$R_V\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1 \qquad R_V\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_2 \qquad R_V\mathbf{v}_3 = -\mathbf{v}_3$$

Dermed er $[R_V]_{\mathcal{B}} = \left[\begin{smallmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{smallmatrix}\right]$, og vi får at

$$\begin{aligned}
[R_V]_{stand} = Q[R_V]_{\mathcal{B}}Q^{-1} &= \begin{bmatrix}1&1&1\\2&0&-1\\1&-1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{bmatrix}\frac{1}{6}\begin{bmatrix}1&2&1\\3&0&-3\\2&-2&2\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{6}\begin{bmatrix}1&1&-1\\2&0&1\\1&-1&-1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&1\\3&0&-3\\2&-2&2\end{bmatrix} = \frac{1}{6}\begin{bmatrix}2&4&-4\\4&2&4\\-4&4&2\end{bmatrix}\\
&= \frac{1}{3}\begin{bmatrix}1&2&-2\\2&1&2\\-2&2&1\end{bmatrix}
\end{aligned}$$

c) Vi begynner med å huske på at

$$\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} \qquad \cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

I denne oppgaven er det lurt om basisvektorene utgjør et ortonormalt høyrehåndssystem. Dette er allerede et høyrehåndssystem, og ortonomalitet får vi ved å normalisere vektorene:

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} \qquad \frac{1}{\sqrt{3}}\mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix}.$$

La S være basis-bytte-matrisen til denne basisen; da har vi at

$$S = QF = Q\begin{bmatrix}1/\sqrt{6}&0&0\\0&1/\sqrt{2}&0\\0&0&1/\sqrt{3}\end{bmatrix}$$

Og da er

$$S^{-1} = F^{-1}Q^{-1} = \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$

Rotasjonen av planet med $\frac{\pi}{6}$ følgende effekt på basisvektorene

$$T\mathbf{v}_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{v}_1 - \frac{1}{2}\mathbf{v}_2 \qquad T\mathbf{v}_2 = \frac{1}{2}\mathbf{v}_1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\mathbf{v}_2 \qquad T\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_3$$

Som gir oss en matrise $[T]_\mathcal{B} = \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, og vi kan regne ut:

$$\begin{aligned}
[T]_{stand} &= QF[T]_\mathcal{B}F^{-1}Q^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/\sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -1/2 & 0 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/2\sqrt{2} & -1/2\sqrt{6} & 0 \\ 1/2\sqrt{2} & \sqrt{3}/2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{6} & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3}/2 & -\sqrt{3}/6 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & \sqrt{3}/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{6} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & \sqrt{3}/3 & 1 \\ \sqrt{3} & -\sqrt{3}/3 & -1 \\ 0 & -2\sqrt{3}/3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \\ 2 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2\sqrt{3}+2 & 2\sqrt{3}-2 & 2 \\ -2 & 2\sqrt{3}+2 & 2\sqrt{3}-2 \\ 2-2\sqrt{3} & -2 & 2\sqrt{3}+2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \sqrt{3}+1 & \sqrt{3}-1 & 1 \\ -1 & \sqrt{3}+1 & \sqrt{3}-1 \\ 1-\sqrt{3} & -1 & \sqrt{3}+1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$