Norges teknisk–naturvitenskapelige universitet
Institutt for matematikk

MA1201/MA6201
Høsten 2016

Løsningsforslag — Øving 9

Med forebehold om feil. Hvis du finner en, ta kontakt med Karin.

Kapittel 5.1

$\boxed{1}$ **a)**

$$\det\begin{bmatrix}-1 & 3 & 5\\ 6 & 4 & 2\\ -2 & 5 & 1\end{bmatrix} \overset{\substack{R_2+6R_1\\ R_3-2R_1}}{=} \det\begin{bmatrix}-1 & 3 & 5\\ 0 & 22 & 32\\ 0 & -1 & -9\end{bmatrix} \overset{R_2\leftrightarrow R_3}{=} -\det\begin{bmatrix}-1 & 3 & 5\\ 0 & -1 & -9\\ 0 & 22 & 32\end{bmatrix}$$

$$\overset{R_3+22R_2}{=} -\det\begin{bmatrix}-1 & 3 & 5\\ 0 & -1 & -9\\ 0 & 0 & -166\end{bmatrix} = -(-1)(-1)(-166) = 166$$

b)

$$\det\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 1\\ 2 & -2 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 6 & 2\end{bmatrix} \overset{R_3-2R_1}{=} \det\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 6 & 2\end{bmatrix}$$

$$\overset{R_4-3R_3}{=} \det\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1\end{bmatrix} = 1\cdot 2\cdot 2\cdot -1 = -4$$

c)

$$\det\begin{bmatrix}1 & 4 & 1 & -3\\ 2 & 10 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & -2 & 1\end{bmatrix} \overset{\substack{R_2-2R_1\\ R_4+R_3}}{=} \det\begin{bmatrix}1 & 4 & 1 & -3\\ 0 & 2 & 0 & 7\\ 0 & 0 & 2 & 2\\ 0 & 0 & 0 & 3\end{bmatrix} = 1\cdot 2\cdot 2\cdot 3 = 12$$

d)

$$\det\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \overset{R_1 \leftrightarrow R_2}{=} -\det\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\overset{R_2 + 2R_1}{=} -\det\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \overset{R_2 \leftrightarrow R_3}{=} \det\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\overset{R_3 + 3R_2}{=} \det\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \overset{R_3 \leftrightarrow R_4}{=} -\det\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\overset{R_4 + 4R_3}{=} -\det\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \overset{R_4 \leftrightarrow R_5}{=} \det\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & -4 \end{bmatrix}$$

$$\overset{R_5 + 4R_4}{=} \det\begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \end{bmatrix} = (-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot(-1)\cdot 6 = 6$$

$\boxed{2}$ **Løsning 1:** Hvis en av radene i A består av kun nuller, så vil også enhver trappeform av A inneholde en rad med bare nuller. Dermed har A ikke full rang, og er singulær. Fra teorem 1.2 vet vi at det medfører at $\det A = 0$.

Løsning 2: Vi kan gange raden med bare nuller med et vilkårlig heltall, uten at det endrer på matrisen A. Om vi ganger med 2, får vi fra proposisjon 1.1, del 2 at $\det(A) = 2\det(A)$, som vi kan forenkle til $\det A = 0$.

$\boxed{5}$ La $\mathbf{A}_1, \cdots, \mathbf{A}_n$ betegne radvektorene til A. Da har vi at

$$\det cA = \det\begin{bmatrix} c\mathbf{A}_1 \\ \vdots \\ c\mathbf{A}_n \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{c}\mathbf{A}_1}{=} c\det\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ c\mathbf{A}_2 \\ \vdots \\ c\mathbf{A}_n \end{bmatrix} = \cdots = c^n \det\begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_n \end{bmatrix}$$

$\boxed{3.6.12}$ **a)** La oss radredusere matrisen:

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ b & c & d\\ b^2 & c^2 & d^2\end{bmatrix} \overset{\substack{R_2-bR_1\\ R_3-b^2R_3}}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & c-b & d-b\\ 0 & c^2-b^2 & d^2-b^2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & c-b & d-b\\ 0 & (c-b)(c+b) & (d-b)(d+b)\end{bmatrix}$$

$$\overset{R_3-(c+b)R_2}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & c-b & d-b\\ 0 & 0 & (d-b)(d-c)\end{bmatrix}$$

Siden b, c og d alle er ulike, er diagonalelementene alle ulik null. Dermed har matrisen full rang, og er ikke-singulær.

b) La oss radredusere matrisen:

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ a & b & c & d\\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2\\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3\end{bmatrix} \overset{\substack{R_2-aR_1\\ R_3-aR_2\\ R_4-aR_3}}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & b-a & c-a & d-a\\ 0 & b(b-a) & c(c-a) & d(d-a)\\ 0 & b^2(b-a) & c^2(c-a) & d^2(d-a)\end{bmatrix}$$

$$\overset{\substack{R_3-bR_2\\ R_4-bR_3}}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & b-a & c-a & d-a\\ 0 & 0 & (c-b)(c-a) & (d-b)(d-a)\\ 0 & 0 & c(c-b)(c-a) & d(d-b)(d-a)\end{bmatrix}$$

$$\overset{R_4-cR_3}{\rightsquigarrow} \begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & b-a & c-a & d-a\\ 0 & 0 & (c-b)(c-a) & (d-b)(d-a)\\ 0 & 0 & 0 & (d-c)(d-b)(d-a)\end{bmatrix}$$

Siden a b, c og d alle er ulike, er diagonalelementene alle ulik null. Dermed har matrisen full rang, og er ikke-singulær.

c) La oss betrakte matrisen

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ t_1 & t_2 & \cdots & t^m & t_{k+1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ t_1^{k-1} & t_2^{k-1} & \cdots & t_k^{k-1} & t_{k+1}^{k-1}\\ t_1^k & t_2^k & \cdots & t_k^k & t_{k+1}^k\end{bmatrix} \overset{\substack{R_2-t_1R_1\\ \vdots\\ R_k-t_1R_{k-1}}}{\rightsquigarrow}$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 0 & t_2-t_1 & \cdots & t^m-t_1 & t_{k+1}-t_1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & t_2^{k-2}(t_2-t_1) & \cdots & t_k^{k-2}(t_k-t_1) & t_{k+1}^{k-2}(t_{k+1}-t_1)\\ 0 & t_2^{k-1}(t_2-t_1) & \cdots & t_2^{k-1}(t_2-t_1) & t_{k+1}^{k-1}(t_{k+1}-t_1)\end{bmatrix} \rightsquigarrow \cdots$$

$$\rightsquigarrow \begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 0 & t_2-t_1 & \cdots & t^m-t_1 & t_{k+1}-t_1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & (t_k-t_{k-1})\cdots(t_k-t_1) & t_{k+1}^{k-2}(t_{k+1}-t_1)\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & (t_{k+1}-t_k)\cdots(t_{k+1}-t_1)\end{bmatrix}$$

Trappeformen av matrisen har kun ikke-null elementer på hoveddiagonalen. Matrisen har dermed full rang, og er ikke-singulær.

$\boxed{5.1.8}$ Vi benytter utregningene i 3.6.12. Legg merke til at for å få de ulike matrisene over på trappeform, så utførte vi kun radoperasjonen som er å trekke et multiplum av en rad fra en annen rad, noe som ikke endrer determinanten (proposisjon 1.1, del 3). Derfor hopper vi over å skrive opp alle radoperasjonene.

a)

$$\det\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ b & c & d\\ b^2 & c^2 & d^2\end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & c-b & d-b\\ 0 & 0 & (d-b)(d-c)\end{bmatrix} = (c-b)(d-b)(d-c)$$

b)

$$\begin{aligned}\det\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ a & b & c & d\\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2\\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3\end{bmatrix} &= \det\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & b-a & c-a & d-a\\ 0 & 0 & (c-b)(c-a) & (d-b)(d-a)\\ 0 & 0 & 0 & (d-c)(d-b)(d-a)\end{bmatrix}\\ &= (b-a)(c-a)(c-b)(d-a)(d-b)(d-c)\end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ t_1 & t_2 & \cdots & t^m & t_{k+1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ t_1^{k-1} & t_2^{k-1} & \cdots & t_k^{k-1} & t_{k+1}^{k-1}\\ t_1^k & t_2^k & \cdots & t_k^k & t_{k+1}^k\end{bmatrix} \underset{\rightsquigarrow}{\substack{R_2-t_1R_1\\ \vdots\\ R_k-t_1R_{k-1}}}\\ =&\begin{bmatrix}1 & 1 & \cdots & 1 & 1\\ 0 & t_2-t_1 & \cdots & t^m-t_1 & t_{k+1}-t_1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & (t_k-t_{k-1})\cdots(t_k-t_1) & t_{k+1}^{k-2}(t_{k+1}-t_1)\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & (t_{k+1}-t_k)\cdots(t_{k+1}-t_1)\end{bmatrix}\\ &= (t_2-t_1)(t_3-t_2)(t_3-t_1)\cdots(t_k-t_{k-1})\cdots(t_k-t_1)(t_{k+1}-t_k)\cdots(t_{k+1}-t_1)\\ &= \prod_{j<i}(t_i-t_j)\end{aligned}$$

Notasjonen i siste linje krever litt forklaring. For det første, $\prod$, aka produktegn, fungerer som summetegn, bare med multiplikasjon. Altså:

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n.$$

Når det gjelder indekseringen, så er den ikke helt eksakt slik den står. Tanken er: Vi ser at i og j skal brukes som indekser på t, og derfor må ligge mellom 1 og $k+1$. Så velger vi oss kun de parene av i og j slik at $i > j$. En annen måte å skrive resultatet på vil være

$$\prod_{i=2}^{k}\left(\prod_{j=1}^{i}(t_i-t_j)\right).$$

Kapittel 5.2

$\boxed{1}$ **a)** Her velger jeg å starte med å gå langs første rad.

$$\det\begin{bmatrix}-1 & 3 & 5\\ 6 & 4 & 2\\ -2 & 5 & 1\end{bmatrix} = -1\det\begin{bmatrix}4 & 2\\ 5 & 1\end{bmatrix} - 3\det\begin{bmatrix}6 & 2\\ -2 & 1\end{bmatrix} + 5\det\begin{bmatrix}6 & 4\\ -2 & 5\end{bmatrix}$$
$$= -1\cdot(4\cdot 1 - 2\cdot 5) - 3\cdot(6\cdot 1 - 2\cdot(-2)) + 5\cdot(6\cdot 5 - 4\cdot(-2))$$
$$= (-1)\cdot(-6) - 3\cdot 10 + 5\cdot 38 = 6 - 30 + 190 = 166$$

b) Jeg starter med å gå langs første kolonne (jeg er på jakt etter å få med flest mulig nuller!). I neste steg går jeg henholds vis langs første kolonne og første rad.

$$\det\begin{bmatrix}1 & -1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1 & 1\\ 2 & -2 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 6 & 2\end{bmatrix} = \det\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ -2 & 2 & 3\\ 0 & 6 & 2\end{bmatrix} + 2\det\begin{bmatrix}-1 & 0 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 0 & 6 & 2\end{bmatrix}$$
$$= 2\det\begin{bmatrix}2 & 3\\ 6 & 2\end{bmatrix} + 2\det\begin{bmatrix}1 & 1\\ 6 & 2\end{bmatrix} - 2\det\begin{bmatrix}1 & 1\\ 6 & 2\end{bmatrix} + 2\det\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 6\end{bmatrix}$$
$$= 2\cdot(2\cdot 2 - 3\cdot 6) + 2\cdot(2\cdot 6 - 0) = 2\cdot(-14+12) = -4$$

Det er fint å observere at svarene vi får her stemmer med oppgave 5.1.1 a og b.

$\boxed{5}$ **b)**

$$\det(A - tI) = \det\begin{bmatrix}-t & 1\\ 1 & -t\end{bmatrix} = (-t)\cdot(-t) - 1\cdot 1 = t^2 - 1$$

c)

$$\det(A - tI) = \det\begin{bmatrix}-t & 1\\ -1 & -t\end{bmatrix} = (-t)\cdot(-t) - 1\cdot(-1) = t^2 + 1$$

g)

$$\det(A - tI) = \det\begin{bmatrix}1-t & 0 & 0\\ -2 & 1-t & 2\\ -2 & 0 & 3-t\end{bmatrix} = (1-t)\det\begin{bmatrix}1-t & 2\\ 0 & 3-t\end{bmatrix}$$
$$= (1-t)(1-t)(3-t) = (1-2t+t^2)(3-t)$$
$$= -t^3 + 3t^2 + 2t^2 - 6t - t + 3 = -t^3 + 5t^2 - 7t + 3$$

h)

$$\det(A - tI) = \det\begin{bmatrix}3-t & 2 & -2\\ 2 & 2-t & -1\\ 2 & 1 & -t\end{bmatrix} \overset{C_2+C_3}{=} \det\begin{bmatrix}3-t & 0 & -2\\ 2 & 1-t & -1\\ 2 & 1-t & -t\end{bmatrix}$$
$$\overset{R_3-R_2}{=} \det\begin{bmatrix}3-t & 0 & -2\\ 2 & 1-t & -1\\ 0 & 0 & 1-t\end{bmatrix} = (1-t)\det\begin{bmatrix}3-t & 0\\ 2 & 1-t\end{bmatrix}$$
$$= (1-t)(3-t)(1-t) = (1-t)^2(3-t).$$

Eksamen høst 2012

$\boxed{2}$

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -3 & 2 & 5 \\ 4 & 6 & 7 \end{bmatrix} \overset{\substack{R_2+3R_1 \\ R_3-4R_1}}{=} \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 10 & 15 \end{bmatrix}$$
$$\overset{R_3+10R_2}{=} \det \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot 5 = -5$$

Siden vi har lært om de denne uka, la oss regne ut inversen til A via Cramers regel (det er såklart helt greit å gjøre det med radeliminasjon slik vi er vant til). Vi starter med å regne ut kofaktorene:

$$C_{11} = \det \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = -16 \qquad C_{12} = -\det \begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = 41 \qquad C_{13} = \det \begin{bmatrix} -3 & 2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = -26$$
$$C_{21} = -\det \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 6 & 7 \end{bmatrix} = -5 \quad C_{22} = \det \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} = 15 \qquad C_{23} = -\det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = -10$$
$$C_{31} = \det \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} = -1 \qquad C_{32} = -\det \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = 1 \quad C_{33} = \det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} = -1$$

Altså har vi

$$C = \begin{bmatrix} -16 & 41 & -26 \\ -5 & 15 & -10 \\ -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \text{ og dermed } A^{-1} = \frac{1}{\det A} C^T = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 16 & 5 & 1 \\ -41 & -15 & -1 \\ 26 & 10 & 1 \end{bmatrix}.$$

$\boxed{7}$ Vi starter med å regne ut:

$$p(\lambda) = \det(\Lambda I_2 - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{bmatrix} = (\lambda - a)(\lambda - d) - bc = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad - bc)$$

Vi skal nå sette inn A i denne formelen for å sjekke å om påstanden i oppgaven stemmer, men vi regner først ut

$$A^2 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a^2 + bc & ba + bd \\ ac + cd & d^2 + bc \end{bmatrix}$$

Da får vi

$$\begin{aligned} p(A) &= A^2 - (a+d)A + (ad - bc)I_2 \\ &= \begin{bmatrix} a^2 + bc & ba + bd \\ ac + cd & d^2 + bc \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} a^2 + ad & ab + bd \\ ac + cd & ad + d^2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

For andre del er det lurt å bruke induksjon. Vi har fra antagelsen samt første del av oppgaven at $A^2 = A + I_2 = f(2)A + f(1)I_2$. Dette viser at påstanden er oppfylt for $n = 2$.

Anta nå at påstanden er oppfyllt for $n = m$, slik at $A^m = f(m)A + f(m-1)I_2$.

Da får vi at

$$\begin{aligned} A^{m+1} &= A(A^m) = A(f(m)A + f(m-1)I_2) = f(m)A^2 + f(m-1)A \\ &= f(m)(A + I_2) = (f(m) + f(m-1))A + f(m)I_2 = f(m+1)A + f(m)I_2, \end{aligned}$$

slik at påstanden stemmer for $n = m + 1$. Påstanden er dermed vist ved induksjon.

Eksamen høst 2013

$\boxed{4}$ Hvis $\det A \neq 0$, er A ikke-singulær. Det betyr at de tre kolonnevektorene i A er lineært uavhengige. Siden A er en 3×3-matrise, betyr det at kolonnevektorene i A danner en basis for $\mathbb{R}^3$. Dermed utspenner de $\mathbb{R}^3$, og den eneste vektoren som er ortogonal på alle tre vektorer er nullvektoren $\mathbf{0}$.