Oppgave 1 Løs ligningssystemet

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\vec{x} = \boxed{\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}}.$$

Oppgave 2 Regn ut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 5 & 0 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}}$$

Oppgave 3 Betrakt matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

a) (50%) Finn den reduserte trappeformen av A.

$$\boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}}.$$

b) (25%) Har A en venstreinvers? ja ☐ nei ☒

c) (25%) Har A en høyreinvers? ja ☒ nei ☐

Oppgave 4 Betrakt matrisen $A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

a) (50%) Regn ut rangen til A.

$$\text{rang}(A) = \boxed{2}.$$

b) (25%) Er kolonnene til A lineært uavhengige? ja ☐ nei ☒

c) (25%) Er A inverterbar? ja ☐ nei ☒

Oppgave 5 Betrakt underrommene $U = \text{Span}(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix})$ og $V = \text{Span}(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix})$ i $\mathbb{R}^3$.

Finn en basis for underrommet $U \cap V$.

En basis er gitt ved $\boxed{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}}$.

Oppgave 6 Betrakt matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -3 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. Finn en matrise B, slik at nullrommet til B er lik kolonnerommet til A.

$$B = \boxed{\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}}$$

Oppgave 7 Avgjør om utsagnene er sanne for alle lineære ligningssystemer $A\vec{x} = \vec{c}$.

a) Det fins minst en løsning $\vec{x}$ for ligningssystemet. sant ☐ usant ☒

b) Hvis det homogene ligningssystemet $A\vec{x} = \vec{0}$ har flere løsninger, så har også ligningssystemet $A\vec{x} = \vec{c}$ flere løsninger. sant ☐ usant ☒

c) Hvis ligningssystemet $A\vec{x} = \vec{c}$ har flere løsninger, så har også det homogene ligningssystemet $A\vec{x} = \vec{0}$ flere løsninger. sant ☒ usant ☐

d) Hvis den reduserte trappeformen av matrisen A er en enhetsmatrise, så har ligningssystemet $A\vec{x} = \vec{c}$ en løsning. sant ☒ usant ☐

e) Hvis ligningssystemet $A\vec{x} = \vec{c}$ har en løsning, så er trappeformen av A en enhetsmatrise. sant ☐ usant ☒

Oppgave 8 Avgjør påstandene er sanne for alle inverterbare matriser A og B av samme størrelse.

a) $-A$ er inverterbar. sant ☒ usant ☐

b) $A + B$ er inverterbar. sant ☐ usant ☒

c) A^{T} er inverterbar og $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$. sant ☒ usant ☐

d) AB er inverterbar og $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$. sant ☐ usant ☒

e) $A + A^{\mathrm{T}}$ er inverterbar. sant ☐ usant ☒

Oppgave 9 Avgjør om mengden av vektorer er et underrom av $\mathbb{R}^3$.

a) $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \leq x_2 \leq x_3\}$ underrom ☐ ikke underrom ☒

b) $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 \leq x_3\}$ underrom ☐ ikke underrom ☒

c) $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 - x_3\}$ underrom ☒ ikke underrom ☐

d) $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 0\}$ underrom ☒ ikke underrom ☐

e) $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 1\}$ underrom ☐ ikke underrom ☒

Oppgave 10 I hver deloppgave er det en påstand med et bevis. I hver deloppgave er enten både påstand og bevis riktige, eller så er begge gale. Riktig betyr at argumentet fungerer, ikke nødvendigvis at det er det beste argumentet for å vise påstanden eller at det er formulert best mulig.

Avgjør om hvert bevis er riktig eller galt.

a) *Påstand:* La $\vec{x}$, $\vec{y}$ og $\vec{z}$ være tre vektorer i $\mathbb{R}^n$. Da er $(\vec{x} \cdot \vec{y})\vec{z} = (\vec{y} \cdot \vec{z})\vec{x}$.

Bevis: Vi regner ut begge sider av ligningen eksplisitt.

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \neq$$

$$\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$(\vec{x} \cdot \vec{y})\vec{z} = (x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n) \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} \cancel{=} \begin{bmatrix} x_1 y_1 z_1 \\ \vdots \\ x_n y_n z_n \end{bmatrix}$$

$$(\vec{y} \cdot \vec{z})\vec{x} = (y_1 z_1 + \cdots + y_n z_n) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \cancel{=} \begin{bmatrix} y_1 z_1 x_1 \\ \vdots \\ y_n z_n x_n \end{bmatrix}$$

Siden det som står i vektoren er relle tall er produktet uavhengig av rekkefølgen. Dermed er begge uttrykk like.

riktig ☐ feil ☒

b) *Påstand:* La A være en matrise, og B og C to høyreinverser til A. Da er $B = C$.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}$ har høyre inverse $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

Bevis: Vi multipliserer ligningen $B = C$ fra venstre med A. Da får vi $AB = AC$. Siden både AB og AC er enhetsmatrisen I stemmer utsagnet.

AB = AC stemmer, men det medfører ikke at B = C også stemmer.

riktig ☐ feil ☒

c) *Påstand:* La A være en matrise, og B en venstre- og C en høyreinvers til A. Da er $B = C$.

Bevis: Vi betrakter produktet BAC. Om vi først multipliserer B med A så får vi IC, altså C. Om vi først multipliserer A med C så får vi BI, altså B. Derfor er $C = B$.

riktig ☒ feil ☐

d) *Påstand:* La A være en $n \times n$ matrise (altså kvadratisk). Anta at $A\vec{x} = \vec{0}$ kun har den trivielle løsningen $\vec{x} = 0$. La $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$. Da er ligningssystemet $A\vec{x} = \vec{c}$ løsbart.

Bevis: Siden $A\vec{x} = \vec{0}$ kun har den trivielle løsningen så er det ikke noen frie variabler, og dermed fins det en ledende 1 i enhver kolonne i den reduserte trappeformen. Siden A er kvadratisk medfører dette at det også fins en ledende 1 i enhver rad av den reduserte trappeformen. Derfor er ligningssystemet $A\vec{x} = \vec{c}$ løsbart.

riktig ☒ feil ☐

e) *Påstand:* La A og B være matriser, slik at produktet AB er definert. Da er

$$\operatorname{rang}(AB) \leq \operatorname{rang}(A).$$

Bevis: Det er det samme om vi gjennomfører radoperasjoner på A, for å så multiplisere med B, eller om vi gjennomfører radoperasjoner på produktet AB. Derfor kan vi anta at A er på trappeform. Men multiplikasjon fra høyre med B bevarer null-radene. Derfor har trappeformen til AB minst like mange null-rader som trappeformen av A, og dermed er $\operatorname{rang}(AB) \leq \operatorname{rang} A$.

riktig ☒ feil ☐

Regninger:

Oppgave 1:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ -2R_1 \\ -R_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ -R_2 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \end{array}\right]$$

Oppgave 3:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ +2R_1 \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \\ \cdot \frac{1}{2} \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \begin{array}{l} -R_2 \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}$$

Ikke ledende 1 i hver kolonne

$\rightsquigarrow$ ingen venstreinvers

Ledende 1 i hver rad

$\rightsquigarrow$ har høyre invers

Oppgave 4

$$\begin{bmatrix} -3 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix} + R_1$$

$$\begin{bmatrix} -3 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} + R_2$$

$$\begin{bmatrix} -3 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \rightsquigarrow \text{rang} = 2$$

Ikke hver kolonne har et ledende tall i trappeformen

$\Rightarrow$ fri variable

$\Rightarrow$ kolonnene ikke lineært uavhengige

og

matrise ikke inverterbar.

Oppgave 5

$$\vec{x} = s\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix} = a\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}-1\\0\\-3\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\0 & 1 & -2 & 0\\1 & 2 & 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}s\\t\\a\\b\end{bmatrix} = \vec{0}$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\0 & 1 & -2 & 0\\1 & 2 & 1 & 3\end{bmatrix} \quad -R_1$$

$$\begin{bmatrix}1 & 2 & -1 & 1\\0 & 1 & -2 & 0\\0 & 0 & 2 & 2\end{bmatrix}$$

b fri

$a = -b$

$$\begin{bmatrix} t = 2a = -2b \\ s = -2t + a - b = 2b \end{bmatrix}$$

$$\vec{x} = -b\begin{bmatrix}1\\2\\-1\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}-1\\0\\-3\end{bmatrix} = b\begin{bmatrix}-2\\-2\\-2\end{bmatrix}$$

$$\left[= 2b\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} - 2b\begin{bmatrix}2\\1\\2\end{bmatrix} \right]$$

ikke så farlig, regnet bare for å sjekke resultatet.

Oppgave 6

$R(B) = N(B)^{\perp}$, skal være $C(A)^{\perp}$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in C(A)^{\perp}$$

$$\iff \left| \begin{array}{l} 2x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 + 2x_2 = 0 \end{array} \right.$$

$$\iff x_1 = 2x_2 \quad \text{og} \quad x_2 + x_3 = 0$$

$$\rightsquigarrow C(A)^{\perp} = \text{Span} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Kan da for eksempel velge

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Oppgave 7:

a) $0x = 1$ har ingen løsning.

b) $0x = 1$ har ingen løsning til tross for at $0x = 0$ har mange løsninger.

c) Hvis $A\vec{x} = \vec{c}$ har flere løsninger, så er alle disse gitt ved å addere den generelle løsningen av $A\vec{x} = \vec{0}$ på en valgt løsning.
$\rightsquigarrow$ $A\vec{x} = \vec{0}$ må også ha flere løsninger.

d) Hvis den reduserte trappeformen er enhetsmatrisen, så kan vi lese ut løsningen (entydig) uansett hva høyre side er.

e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ har en løsning, men $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ er redusert trappeform og ikke enhetsmatrise.

Oppgave 8

a) $(-A)^{-1} = -A^{-1}$

b) I, $-I$ inverterbar, men $I + (-I) = 0$ ikke

c) ja

d) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1} \neq A^{-1}B^{-1}$

e) samme som b)

Oppgave 9

a) $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ er i mengden, men $(-1)\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix}$ er ikke i mengden.

b) $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ er i mengden, men $(-1)\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$ er ikke i mengden.

c) $\vec{x}, \vec{y}$ i mengden, altså $x_1 = x_2 - x_3$ og $y_1 = y_2 - y_3$

$$\Rightarrow (\vec{x} + \vec{y})_1 = x_1 + y_1 = x_2 + y_2 - (x_3 + y_3)$$
$$= (\vec{x} + \vec{y})_2 - (\vec{x} + \vec{y})_3$$

$$(s\vec{x})_1 = sx_1 = sx_2 - sx_3$$
$$= (s\vec{x})_2 - (s\vec{x})_3$$

d) $\vec{x}, \vec{y}$ i mengden

$$(\vec{x}+\vec{y}) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = \vec{x} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + \vec{y} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$$
$$= 0 + 0 = 0$$
$$(s\vec{x}) \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = s\, \vec{x} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = s0 = 0$$

e) $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ i mengden,

$2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ ikke i mengden.