NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i **MA1201 Lineær algebra og geometri**

Faglig kontakt under eksamen: Steffen Oppermann

Tlf: 9189 7712

Eksamensdato: 05.10.2016

Eksamenstid (fra–til): 08:15–09:45

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Annen informasjon:
Det er 10 oppgaver, som alle teller likt.
På oppgaver med deloppgaver teller alle deloppgavene like mye, med mindre noe annet er spesifisert.
På flervalgsoppgaver teller feil svar negativt, men hele oppgaven kan ikke telle negativt.

Det er kun resultatene som teller og som skal skrives på oppgavearket. Utregning og lignende skrives på kladdeark.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 5

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Merk! Studenter finner sensur i Studentweb. Har du spørsmål om din sensur må du kontakte instituttet ditt. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike spørsmål.

Oppgave 1 Løs ligningssystemet

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix} \vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

$$\vec{x} = \boxed{\phantom{\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}}}.$$

Oppgave 2 Regn ut:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} = \boxed{\phantom{\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}}}$$

Oppgave 3 Betrakt matrisen $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

a) (50%) Finn den reduserte trappeformen av A.

$$\boxed{\phantom{\begin{matrix} \\ \\ \end{matrix}}}.$$

b) (25%) Har A en venstreinvers? ja ☐ nei ☐

c) (25%) Har A en høyreinvers? ja ☐ nei ☐

Oppgave 4 Betrakt matrisen $A = \begin{bmatrix} -3 & -2 & -3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

a) (50%) Regn ut rangen til A.

$$\text{rang}(A) = \boxed{}.$$

b) (25%) Er kolonnene til A lineært uavhengige? ja ☐ nei ☐

c) (25%) Er A inverterbar? ja ☐ nei ☐

Oppgave 5 Betrakt underrommene $U = \text{Span}(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix})$ og $V = \text{Span}(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix})$ i $\mathbb{R}^3$.

Finn en basis for underrommet $U \cap V$.

En basis er gitt ved $\boxed{}$.

Oppgave 6 Betrakt matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & -1 \\ -3 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$. Finn en matrise B, slik at nullrommet til B er lik kolonnerommet til A.

$$B = \boxed{}$$

Oppgave 7 Avgjør om utsagnene er sanne for alle lineære ligningssystemer $A\vec{x} = \vec{c}$.

a) Det fins minst en løsning $\vec{x}$ for ligningssystemet. sant ☐ usant ☐

b) Hvis det homogene ligningssystemet $A\vec{x} = \vec{0}$ har flere løsninger, så har også ligningssystemet $A\vec{x} = \vec{c}$ flere løsninger. sant ☐ usant ☐

c) Hvis ligningssystemet $A\vec{x} = \vec{c}$ har flere løsninger, så har også det homogene ligningssystemet $A\vec{x} = \vec{0}$ flere løsninger. sant ☐ usant ☐

d) Hvis den reduserte trappeformen av matrisen A er en enhetsmatrise, så har ligningssystemet $A\vec{x} = \vec{c}$ en løsning. sant ☐ usant ☐

e) Hvis ligningssystemet $A\vec{x} = \vec{c}$ har en løsning, så er trappeformen av A en enhetsmatrise. sant ☐ usant ☐

Oppgave 8 Avgjør påstandene er sanne for alle inverterbare matriser A og B av samme størrelse.

a) $-A$ er inverterbar. sant ☐ usant ☐

b) $A + B$ er inverterbar. sant ☐ usant ☐

c) A^{T} er inverterbar og $(A^{\mathrm{T}})^{-1} = (A^{-1})^{\mathrm{T}}$. sant ☐ usant ☐

d) AB er inverterbar og $(AB)^{-1} = A^{-1}B^{-1}$. sant ☐ usant ☐

e) $A + A^{\mathrm{T}}$ er inverterbar. sant ☐ usant ☐

Oppgave 9 Avgjør om mengden av vektorer er et underrom av $\mathbb{R}^3$.

a) $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 \leq x_2 \leq x_3\}$ underrom ☐ ikke underrom ☐

b) $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 \leq x_3\}$ underrom ☐ ikke underrom ☐

c) $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 - x_3\}$ underrom ☐ ikke underrom ☐

d) $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 0\}$ underrom ☐ ikke underrom ☐

e) $\{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \vec{x} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} = 1\}$ underrom ☐ ikke underrom ☐

Oppgave 10 I hver deloppgave er det en påstand med et bevis. I hver deloppgave er enten både påstand og bevis riktige, eller så er begge gale. Riktig betyr at argumentet fungerer, ikke nødvendigvis at det er det beste argumentet for å vise påstanden eller at det er formulert best mulig.

Avgjør om hvert bevis er riktig eller galt.

a) *Påstand:* La $\vec{x}$, $\vec{y}$ og $\vec{z}$ være tre vektorer i $\mathbb{R}^n$. Da er $(\vec{x} \cdot \vec{y})\vec{z} = (\vec{y} \cdot \vec{z})\vec{x}$.

Bevis: Vi regner ut begge sider av ligningen eksplisitt.

$$(\vec{x} \cdot \vec{y})\vec{z} = (x_1y_1 + \cdots + x_ny_n) \begin{bmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1y_1z_1 \\ \vdots \\ x_ny_nz_n \end{bmatrix}$$

$$(\vec{y} \cdot \vec{z})\vec{x} = (y_1z_1 + \cdots + y_nz_n) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1z_1x_1 \\ \vdots \\ y_nz_nx_n \end{bmatrix}$$

Siden det som står i vektoren er relle tall er produktet uavhengig av rekkefølgen. Dermed er begge uttrykk like.

riktig ☐ feil ☐

b) *Påstand:* La A være en matrise, og B og C to høyreinverser til A. Da er $B = C$.

Bevis: Vi multipliserer ligningen $B = C$ fra venstre med A. Da får vi $AB = AC$. Siden både AB og AC er enhetsmatrisen I stemmer utsagnet.

riktig ☐ feil ☐

c) *Påstand:* La A være en matrise, og B en venstre- og C en høyreinvers til A. Da er $B = C$.

Bevis: Vi betrakter produktet BAC. Om vi først multipliserer B med A så får vi IC, altså C. Om vi først multipliserer A med C så får vi BI, altså B. Derfor er $C = B$.

riktig ☐ feil ☐

d) *Påstand:* La A være en $n \times n$ matrise (altså kvadratisk). Anta at $A\vec{x} = \vec{0}$ kun har den trivielle løsningen $\vec{x} = 0$. La $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$. Da er ligningssystemet $A\vec{x} = \vec{c}$ løsbart.

Bevis: Siden $A\vec{x} = \vec{0}$ kun har den trivielle løsningen så er det ikke noen frie variabler, og dermed fins det en ledende 1 i enhver kolonne i den reduserte trappeformen. Siden A er kvadratisk medfører dette at det også fins en ledende 1 i enhver rad av den reduserte trappeformen. Derfor er ligningssystemet $A\vec{x} = \vec{c}$ løsbart.

riktig ☐ feil ☐

e) *Påstand:* La A og B være matriser, slik at produktet AB er definert. Da er

$$\text{rang}(AB) \leq \text{rang}(A).$$

Bevis: Det er det samme om vi gjennomfører radoperasjoner på A, for å så multiplisere med B, eller om vi gjennomfører radoperasjoner på produktet AB. Derfor kan vi anta at A er på trappeform. Men multiplikasjon fra høyre med B bevarer null-radene. Derfor har trappeformen til AB minst like mange null-rader som trappeformen av A, og dermed er $\text{rang}(AB) \leq \text{rang}A$.

riktig ☐ feil ☐