

Oppgave 1

$$a) \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & -2 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 0 \end{array} \right] \begin{array}{l} + R_1 \\ -\frac{3}{2} R_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{5}{2} & -1 & -\frac{3}{2} \end{array} \right] \begin{array}{l} \curvearrowright \\ \curvearrowleft \end{array} \cdot 2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right]$$

x_3 fri

$$x_2 = \frac{1}{5} (2x_3 - 3)$$

$$x_1 = \frac{1}{2} (x_2 - 2x_3 + 1)$$

$$= \frac{1}{10} (2x_3 - 3) - x_3 + \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{10} (-8x_3 + 2)$$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{bmatrix} \frac{1}{5} \\ -\frac{3}{5} \\ 0 \end{bmatrix} + x_3 \begin{bmatrix} -\frac{4}{5} \\ \frac{2}{5} \\ 1 \end{bmatrix}$$

om man har lyst på pene tall: $x_3 = -1 + 5t$

$$\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 5 \end{bmatrix}$$

b) $A\vec{x} = \vec{b}$ har en entydig løsning
 $\Rightarrow$ ingen frie variable, hver kolonne
av den reduserte trappformen inneholder
en ledende 1

A kvadratisk

$\Rightarrow A$ inverterbar

$\Rightarrow A\vec{y} = \vec{c}$ har den entydige
løsningen $\vec{y} = A^{-1}\vec{c}$.

Oppgave 2

$$a) \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & 3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \updownarrow \\ \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 3 & -1 & -1 & -1 \\ -2 & 3 & 4 & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -3R_1 \\ +2R_1 \end{matrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -7 & -10 & 5 \\ 0 & 7 & 10 & -5 \end{bmatrix} + R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & -7 & -10 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \left(-\frac{1}{7}\right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & \frac{10}{7} & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} -2R_2$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{7} & -\frac{4}{7} \\ 0 & 1 & \frac{10}{7} & -\frac{5}{7} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) $\text{rang}(A) = 2$

(antall ikke-null rader i
den reduserte trappeformen)

en basis for radrommet:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{1}{7} \\ -\frac{4}{7} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{10}{7} \\ -\frac{5}{7} \end{bmatrix}$$

(radene i den reduserte
trappeformen)

en basis for kolonne rommet:

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(kolonnene som tilsvare
de ikke-frie variablene)

Oppgave 3

$$a) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$b) \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 1 & 0 \\ b & 1 & -1 & | & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad -b \cdot R_1$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & | & 1 & 0 \\ 0 & 1+b & -1-2b & | & -b & 1 \end{bmatrix}$$

Anta først at $b \neq -1$.

For $A\vec{x} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ får vi løsningene

x_3 fri

$$x_2 = \frac{-b + x_3(1+2b)}{1+b}$$

$$x_1 = x_2 - 2x_3 + 1$$

Vi trenger bare en løsning, og velger

$x_3 = 1$, så $x_2 = 1$ og $x_1 = 0$.

For $A\vec{x} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ får vi løsningene

x_3 fri

$$x_2 = \frac{1 + x_3(1+2b)}{1+b}$$

$$x_1 = x_2 - 2x_3$$

Iggjen kan vi velge x_3 , og velger $x_3 = 1$,
så $x_2 = 2$ og $x_1 = 0$.

$\Rightarrow$ For $b \neq -1$ er $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ høyreinvert.

Vi kan prøve eksplisitt at det også
stemmer for $b = -1$:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ b & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ uansett } b.$$

Alternativ løsning: Legger man merk til at
den høyre delen $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ b & 1 & -1 \end{bmatrix}$

er invertierbar (har determinant -1),

så kan man også sette opp direkte

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Oppgave 4

a) • $\vec{0} \in M$ ✓

• $\vec{x}$ og $\vec{y} \in M$

$$\begin{aligned}\Rightarrow (\vec{x} + \vec{y})_1 &= x_1 + y_1 = x_2 + 2x_3 + y_2 + 2y_3 \\ &= (\vec{x} + \vec{y})_2 + 2(\vec{x} + \vec{y})_3\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{x} + \vec{y} \in M$$

• $\vec{x} \in M$ og $s \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}(s\vec{x})_1 &= sx_1 = s(x_2 + 2x_3) = sx_2 + 2sx_3 \\ &= (s\vec{x})_2 + 2(s\vec{x})_3\end{aligned}$$

$$\Rightarrow s\vec{x} \in M.$$

Alternativt:

$$M = N([1 \ -1 \ -2])$$

og vi vet at nullrom er underrom.

b) en basis: $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

for å gjøre ortogonal, erstatt $\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ med

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} - \underbrace{\frac{\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{\| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \|^2}}_{=1} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$\leadsto$ en ortogonal basis

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \text{proj}_M \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} &= \frac{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}}{\| \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \|^2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}}{\| \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \|^2} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{4}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{-3}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Oppgave 5

$$a) \det A_2 = 0 \cdot 0 - 1 \cdot 1 = -1$$

$$\det A_3 = 0$$

$$\det A_4 = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \leftarrow \text{utvikle etter 1. rad}$$

$$= - \det \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
$$\quad \quad \quad = -1$$

$$= 1$$

$$b) \det A_{n+2} = \det \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ 0 & 0 & \vdots & \vdots & A_n \end{bmatrix} \leftarrow \text{utvikle etter 1. rad}$$

$$= - \det \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \vdots & A_n \end{bmatrix}$$

$\uparrow$ utvikle etter 1. kolonne

$$= - \det A_n$$

siden vi alt vet at $\det A_2 \neq 0$ og

$\det A_3 = 0$:

$\det A_n \neq 0$ hvis og bare hvis n er et partall.

Oppgave 6

$$a) \quad A = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 \end{bmatrix}$$

$$\text{egen verdier: } p_A(t) = t^2 - 4t = t(t-4)$$

$$\rightarrow \text{egen verdier } \lambda_1 = 0 \text{ og } \lambda_2 = 4$$

egenvektorer:

$$\begin{aligned} E(0) &= N(A) = N\left(\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \end{bmatrix}\right) \\ &= \text{Span} \begin{bmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(4) &= N(A - 4I) = N\left(\begin{bmatrix} -3 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & -1 \end{bmatrix}\right) \\ &= N\left(\begin{bmatrix} \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}\right) = \text{Span} \begin{bmatrix} 1 \\ -\sqrt{3} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$$\left(D_n \text{ er } B^T A B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \right)$$

$$b) \vec{y} = B^T \vec{x}$$

Da blir ligningen

$$\vec{x}^T A \vec{x} + [-2\sqrt{3} \quad -2] \vec{x} = 0$$

til

$$\begin{aligned} \vec{y}^T B^T A B \vec{y} + [-2\sqrt{3} \quad -2] B \vec{y} &= 0 \\ \underbrace{= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}} & \quad \underbrace{= [-2\sqrt{3} \quad -2] \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}} \end{aligned}$$

$$= [-4 \quad 0]$$

altså

$$4 y_2^2 - 4 y_1 = 0$$

$$\text{eller } y_1 = y_2^2$$

Skisse:

