NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i
MA1201/MA6201 Lineær algebra og geometri

Faglig kontakt under eksamen: Steffen Oppermann

Tlf: 9189 7712

Eksamensdato: 01. desember 2016

Eksamenstid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D: Ingen trykte eller håndskrevne hjelpemidler tillatt. Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Annen informasjon:
Foreleseren skal komme til eksamenssted ca klokken 10 og ca klokken 12, for eventuelle spørsmål. Tida kan variere litt i tilfellet det er eksamen på forskjellige rom. (Gjelder ikke studenter i MA6201 som tar eksamen utenfor NTNU Trondheim.)

Alle oppgaver teller likt. Innenfor hver oppgave teller alle deloppgaver likt.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 2

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Informasjon om trykking av eksamensoppgave	
Originalen er:	
1-sidig ☐	**2-sidig** ☒
sort/hvit ☒	**farger** ☐
skal ha flervalgskjema ☐	

Dato Sign

Oppgave 1

a) Løs det lineære ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 + 2x_3 &= 1, \\ -2x_1 + x_2 - 2x_3 &= -1, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0. \end{aligned}$$

b) La A være en reell $n \times n$-matrise, og $\vec{b} \in \mathbb{R}^n$ en vektor slik at ligningssystemet $A\vec{x} = \vec{b}$ har en entydig løsning. Vis at ligningssystemet $A\vec{y} = \vec{c}$ da har en entydig løsning for enhver vektor $\vec{c} \in \mathbb{R}^n$.

Oppgave 2 La A være matrisen

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \\ -2 & 3 & 4 & -1 \end{bmatrix}.$$

a) Finn den reduserte trappeformen til A.

b) Bestem rangen til A. Finn en basis for radrommet og en basis for kolonnerommet til A.

Oppgave 3

a) Verifiser at $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ er en høyreinvers til $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

b) Finn en høyreinvers til matrisa $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ b & 1 & -1 \end{bmatrix}$, der $b \in \mathbb{R}$.

Oppgave 4 Betrakt den følgende mengden av vektorer:

$$M = \{\vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 = x_2 + 2x_3\}.$$

a) Vis at M er et underrom av $\mathbb{R}^3$.

b) Finn en ortogonal basis for M.

c) Beregn projeksjonen av $\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix}$ på M.

Oppgave 5 La A_n være $n \times n$-matrisen med 1 i alle plasser rett ved siden av diagonalen, og 0 ellers. Det vil si

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, A_5 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \ldots$$

a) Regn ut $\det A_2$, $\det A_3$ og $\det A_4$.

b) Vis at A_n er inverterbar hvis og bare hvis n er et partall.

(Hint: En mulig strategi er å først vise at $\det A_{n+2} = -\det A_n$.)

Oppgave 6 Målet med denne oppgaven er å undersøke kjeglesnittet gitt ved ligningen

$$x_1^2 - 2\sqrt{3}x_1x_2 + 3x_2^2 - 2\sqrt{3}x_1 - 2x_2 = 0.$$

a) Finn en ortogonal matrise B slik at $B^{\mathrm{T}} \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 3 \end{bmatrix} B$ er en diagonalmatrise.

b) Innfør et nytt koordinatsystem der kjeglesnittet er på standardform, det vil si slik at formelen i nye koordinater (y_1, y_2) ikke har noe ledd by_1y_2. Skisser kjeglesnittet.