NTNU

Kunnskap for en bedre verden

Institutt for matematiske fag

Eksamensoppgave i
MA1201/MA6201 Lineær algebra og geometri

Faglig kontakt under prøven: Øyvind Solberg

Tlf: 7359 1748

Dato for prøven: 2. desember 2017

Prøvetid (fra–til): 09:00–13:00

Hjelpemiddelkode/Tillatte hjelpemidler: D: Bestemt, enkel kalkulator tillatt.

Målform/språk: bokmål

Antall sider: 3

Antall sider vedlegg: 0

Kontrollert av:

Dato Sign

Oppgave 1

a) Løs det homogene likningssystemet gitt ved

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 &= 0 \\ 3x_1 + 2x_2 + 12x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}$$

b) Vis at $(2, -2, 0, 3)$ er en løsning av det inhomogene likningssystemet gitt ved

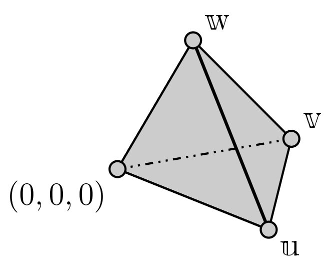
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 - x_3 + x_4 &= 7 \\ -x_1 + 2x_2 + 4x_3 + x_4 &= -3 \\ 3x_1 + 2x_2 + 12x_3 + x_4 &= 5 \end{aligned}$$

Finn alle løsningene av dette inhomogene likningssystemet. Er likningssystemet løsbart for alle konstantledd forskjellig fra $(7, -3, 5)$?

Oppgave 2 La $\mathbb{u} = (4, 1, 1)$, $\mathbb{v} = (1, 3, 0)$ og $\mathbb{w} = (1, 1, 4)$ være tre vektorer i $\mathbb{R}^3$.

(a) Beregn vektorproduktet $\mathbb{u} \times \mathbb{v}$. Bestem arealet av parallellogrammet utspent av $\mathbb{u}$ og $\mathbb{v}$.

(b) Volumet av et tetraeder er $\frac{1}{3} A \cdot h$, hvor A er arealet av grunnflaten (trekanten utspent av $\mathbb{u}$ og $\mathbb{v}$) og h er høyden i tetraederet (den loddrette avstanden fra endepunktet til $\mathbb{w}$ til grunnflaten):



Finn volumet av tetraederet utspent av vektorene $\mathbb{u}$, $\mathbb{v}$ og $\mathbb{w}$.

Oppgave 3 La $A = A(t)$ være matrisen

$$A(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -6 & t-6 & t-6 \\ t+1 & t & t \end{bmatrix},$$

hvor t er et reelt tall.

a) Beregn determinanten $\det(A(t))$ av $A(t)$. For hvilke verdier av t har likningssystemet $A(t)\mathbb{x} = \mathbb{0}$ uendelig mange løsninger?

b) Når er matrisen $A(t)$ en invertibel matrise? For $t = 1$, finn inversen til $A(1)$.

Oppgave 4 La $S = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.

a) Bestem egenverdiene og egenvektorene til matrisen S.

b) Ved å vise til teorien, gi to forskjellige forklaringer for hvorfor egenvektorene til S er lineært uavhengig. (Hint: ortogonale, egenrom).

c) Betrakt kjeglesnittet gitt ved

$$3x^2 + 2xy + 3y^2 + 4\sqrt{2}x + 4\sqrt{2}y = 0.$$

Bestem hvorvidt det er en ellipse, en hyperbel eller en parabel, ved først å overføre den kvadratiske formen

$$3x^2 + 2xy + 3y^2$$

til standard form uten blandlingsledd/kryssledd xy ved å benytte en symmetrisk matrise A og en ortogonal matrise P.

Husk å oppgi ditt valg av A og P.

Oppgave 5 La P være en ortogonal 3×3-matrise, dvs. $P^{-1} = P^T$. Betrakt P som en lineær transformasjon $T_P \colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gitt ved at $\mathbb{u} \mapsto P\mathbb{u}$ for en vektor $\mathbb{u}$ i $\mathbb{R}^3$, hvor vi betrakter alle vektorene som kolonnevektorer.

a) La $\mathbb{x}$ og $\mathbb{y}$ være to vektorer i $\mathbb{R}^3$. Skalarproduktet $\mathbb{x} \cdot \mathbb{y}$ mellom $\mathbb{x}$ og $\mathbb{y}$ er gitt som matriseproduktet $\mathbb{x}^T\mathbb{y}$.

Vis at T_P bevarer lengden av en vektor og skalarproduktet og vinkelen $\alpha(\mathbb{u}, \mathbb{v})$ mellom to ikke-null vektorer $\mathbb{u}$ og $\mathbb{v}$ i $\mathbb{R}^3$, dvs.

(i) $\|P\mathbb{u}\| = \|\mathbb{u}\|$,

(ii) $P\mathbb{u} \cdot P\mathbb{v} = \mathbb{u} \cdot \mathbb{v}$,

(iii) $\alpha(\mathbb{u}, \mathbb{v}) = \alpha(P\mathbb{u}, P\mathbb{v})$.

b) Betegn volumet av et objekt K i $\mathbb{R}^3$ med $\mathrm{Vol}(K)$. La C være en rettvinklet terning i $\mathbb{R}^3$. Vis at

$$\mathrm{Vol}(C) = \mathrm{Vol}(T_P(C)).$$