SAMMENHENGEN 4.9 OG 6.3:

DEF 4.9.2: LA W VÆRE ET UNDERROM AV $\mathbb{R}^n$, SÅ KALLES

$$W^\perp = \{\vec{v} \in \mathbb{R}^n \mid \langle \vec{v}, \vec{w} \rangle = 0 \quad \forall \vec{w} \in W\}$$

DET ORTOGONALE KOMPLEMENTET TIL W

OBS: $W^\perp$ ER ET UNDERROM AV $\mathbb{R}^n$

⌜LA $\vec{v}_1, \vec{v}_2 \in W^\perp \Rightarrow \langle \vec{v}_1 + \vec{v}_2, \vec{w} \rangle = \langle \vec{v}_1, \vec{w} \rangle + \langle \vec{v}_2, \vec{w} \rangle = 0 \quad \forall \vec{w} \in W$

LA $\vec{v}_1 \in W^\perp, k \in \mathbb{R} \Rightarrow \langle k\vec{v}_1, \vec{w} \rangle = k \langle \vec{v}_1, \vec{w} \rangle = 0 \quad \forall \vec{w} \in W$ ⌟

OBS: FRA AVSNITT 6.3: $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$ KAN ENTYDIG SKRIVES PÅ FORMEN

$$\vec{v} = \vec{w} + \vec{w}^\perp$$

DER $\vec{w} \in W$ OG $\langle \vec{w}^\perp, \vec{u} \rangle = 0 \quad \forall \vec{u} \in W$

$\Rightarrow \vec{w}^\perp \in W^\perp$

$\Rightarrow \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ KAN ENTYDIG SKRIVES PÅ FORMEN

$$\vec{v} = \vec{w} + \vec{w}^\perp \qquad (*)$$

DER $\vec{w} \in W$ OG $\vec{w}^\perp \in W^\perp$

OBS: W.. UNDERROM AV $\mathbb{R}^n$ MED BASIS $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r\}$

$\xRightarrow{GS}$ ORTOGONAL BASIS $\{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r\}$

$W^\perp$.. UNDERROM AV $\mathbb{R}^n$ MED BASIS $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_k\}$

$\xrightarrow{G.S}$ ORTOGONAL BASIS $\{\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k\}$

LA $S = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \dots, \vec{u}_r, \vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_k\}$

$\Rightarrow$ ·) S ORTOGONAL MENGDE OG $0 \notin S$

·) $\mathrm{span}(S) = \mathbb{R}^n$ (PÅ GRUNN AV $(*)$)

$\Rightarrow$ ·) S LIN. UAVH + ORTOGONAL

·) $\mathrm{span}(S) = \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow$ S ORTOGONAL BASIS FOR $\mathbb{R}^n$ OG $r+k=n$

$\xRightarrow[GS]{4.3.2}$ $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_r, \vec{w}_1, \vec{w}_2, \dots, \vec{w}_k\}$ BASIS FOR $\mathbb{R}^n$ OG $r+k=n$

TM 4.9.7 LA A VÆRE EN $m \times n$ MATRISE

(a) RR TIL A ER DET ORTOGONALE KOMPLEMENTET TIL NR TIL A

(b) KR TIL A ER DET ORTOGONALE KOMPLEMENTET TIL NR TIL AT

IDÉ: (a)

$A\vec{x}=\vec{0}$ KAN SKRIVES SOM $A\vec{x}=\begin{pmatrix}\vec{r}_1\\ \vec{r}_2\\ \vdots\\ \vec{r}_m\end{pmatrix}\vec{x}=\begin{pmatrix}\langle\vec{r}_1,\vec{x}\rangle\\ \langle\vec{r}_2,\vec{x}\rangle\\ \vdots\\ \langle\vec{r}_n,\vec{x}\rangle\end{pmatrix}=\vec{0}$

$\Rightarrow$ $\vec{x}$ ER EN LØSNING TIL $A\vec{x}=\vec{0} \Leftrightarrow \langle\vec{r}_i,\vec{x}\rangle=0 \;\forall i$

$\Leftrightarrow \langle\vec{r},\vec{x}\rangle=0 \;\; \forall r\in$ RR TIL A

[RR TIL A $=\{\vec{y}\in\mathbb{R}^n \mid \vec{y}=k_1\vec{r}_1+k_2\vec{r}_2+\dots+k_m\vec{r}_m$ MED $k_i\in\mathbb{R}\;\forall i\}$]

$\Rightarrow \vec{x}\in$ (RR TIL A)$^\perp$ = NR TIL A

EKS: a) GITT $S=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\5\\8\\11\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}\right\}$. LA $W=\text{span}(S)$. FINN EN BASIS TIL W.

LA

$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&5&1\\3&8&2\\4&11&3\end{pmatrix}$ $\rightsquigarrow$ $W=\text{span}(S)=$ KR TIL A

$\rightsquigarrow$ SER ETTER EN BASIS FOR KR TIL A

$$A=\begin{pmatrix}1&2&0\\2&5&1\\3&8&2\\4&11&3\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ |-2R_1\\ |-3R_1\\ |-4R_1\end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&1\\0&2&2\\0&3&3\end{pmatrix}\begin{matrix}|-2R_2\\ \\ |-2R_2\\ |-3R_3\end{matrix} \longrightarrow \begin{pmatrix}1&0&-2\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} \text{ RED TF}$$

↑ ↑ BASIS FOR KR TIL A

↑ ↑ LEDENDE ENERE

$\Rightarrow S_1=\left\{\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\5\\8\\11\end{pmatrix}\right\}$ ER EN BASIS FOR W.

b) UTVID S_1 TIL EN BASIS FOR $\mathbb{R}^4$.

$\rightsquigarrow$ LA S_2 VÆRE EN BASIS FOR $W^\perp$ $\Rightarrow$ $B=S_1\cup S_2$ ER EN BASIS FOR $\mathbb{R}^4$

$W=\text{span}(S)=$ KR TIL A $\overset{4.9.7}{\Rightarrow}$ $W^\perp=$ NR TIL A^T

SER ETTER EN BASIS FOR NR TIL A^T

$$A^T=\begin{pmatrix}1&2&3&4\\2&5&8&11\\0&1&2&3\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ |-2R_1\\ \\ \end{matrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&2&3&4\\0&1&2&3\\0&1&2&3\end{pmatrix}\begin{matrix}|-2R_2\\ \\ |-R_2\end{matrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1&0&-1&-2\\0&1&2&3\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$\vec{x}=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}$ LØSNING TIL $A^T\vec{x}=\vec{0}$ IF

$x_4=t$

$x_3=s$

$x_2=-2x_3-3x_4=-2s-3t \quad (s,t\in\mathbb{R})$

$x_1=x_3+2x_4=s+t$

$$\Rightarrow \vec{x} = \begin{pmatrix} s+t \\ -2s-3t \\ s \\ t \end{pmatrix} = s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ s,t \in R$$

$$\Rightarrow \text{NR TIL } A^T = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\Rightarrow S_2 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \ldots \text{ BASIS FOR } W^\perp$$

$$\Rightarrow S = S_1 \cup S_2 = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} \ldots \text{ BASIS FOR } \mathbb{R}^4$$