7.1-7.3: DIAGONALISERING AV SYMMETRISKE MATRISER & KJEGLESNITT:

MÅL: ·) ALLE SYMMETRISKE MATRISER ER DIAGONALISERBAR
·) KEGLESNITT – LINEÆR ALGEBRA

MOTIVASJON: HVIS A ER SYMMETRISK, DVS $A=A^T$ OG DIAGONALISERBAR

$\Rightarrow \exists P$ INVERTIBEL OG D DIAGONALMATRISE SÅ $P^{-1}AP=D$

$\Rightarrow P^TA(P^{-1})^T = P^TA^T(P^{-1})^T = (P^{-1}AP)^T = D^T = D = P^{-1}AP$

$\rightsquigarrow$ SER UT SOM $P^T=P^{-1}$

DEF 7.1.1 EN KVADRATISK MATRISE B KALLES ORTOGONAL HVIS $P^{-1}=P^T$
($\rightsquigarrow$ ORTOGONALE MATRISER ER INV.)

EKS:
$$A=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix} \ldots \text{ BESKRIVER ROTASJONEN OM EN VINKEL } \theta$$

$$A^T=\begin{pmatrix}\cos(\theta) & \sin(\theta)\\ -\sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix} \Rightarrow AA^T=A^TA=I.$$

SKAL PRØVE Å FORSTÅ ORTOGONALE MATRISER BEDRE

TM 7.1.1: LA A VÆRE EN $n\times n$ MATRISE. FØLGENDE ER EKVIVALENT
(a) A ER ORTOGONAL
(b) RADVEKTORENE TIL A DANNER EN ORTONORMAL MENGDE I $\mathbb{R}^n$
(c) KOLONNEVEKTORENE TIL A DANNER EN ORTONORMAL MENGDE I $\mathbb{R}^n$.

BEVIS: OBS A ER ORTOGONAL $\Leftrightarrow$ A^T ER ORTOGONAL
$\Rightarrow$ NOK Å VISE (a) $\Leftrightarrow$ (b).

(a) $\Leftrightarrow$ (b): LA $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n$ VÆRE RADVEKTORENE TIL A.

A ER ORTOGONAL $\overset{1.6.3}{\Longleftrightarrow} AA^T=I \Leftrightarrow \langle \vec{a}_i, \vec{a}_j\rangle = 0 \ \forall i\neq j$ OG $\langle \vec{a}_i, \vec{a}_i\rangle = 1$.
$\Leftrightarrow \{\vec{a}_1, \ldots, \vec{a}_n\}$ ... ORTONORMAL MENGDE.

HER BRUKTE VI
$$AA^T=\begin{pmatrix}\vec{a}_1\\ \vec{a}_2\\ \vdots\\ \vec{a}_n\end{pmatrix}(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_n) = \begin{pmatrix}\langle \vec{a}_1,\vec{a}_1\rangle & \langle \vec{a}_1,\vec{a}_2\rangle & \cdots & \langle \vec{a}_1,\vec{a}_n\rangle\\ \langle \vec{a}_2,\vec{a}_1\rangle & \langle \vec{a}_2,\vec{a}_2\rangle & \cdots & \langle \vec{a}_2,\vec{a}_n\rangle\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ \langle \vec{a}_n,\vec{a}_1\rangle & \langle \vec{a}_n,\vec{a}_2\rangle & \cdots & \langle \vec{a}_n,\vec{a}_n\rangle\end{pmatrix}$$ □

TM 7.1.2: LA A OG B VÆRE ORTOGONALE MATRISER AV SAMME STØRRELSE, SÅ GJELDER
(a) A^{-1} ER ORTOGONAL
(b) AB ER ORTOGONAL
(c) $\det(A)=1$ ELLER $\det(A)=-1$

BEVIS: PRØV SELV

TM 7.13: LA A VÆRE EN $n\times n$ MATRISE, SÅ ER FØLGENDE EKVIVALENT

(a) A ER ORTOGONAL

(b) $\|A\vec{x}\| = \|\vec{x}\| \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$

(c) $\langle A\vec{x}, A\vec{y}\rangle = \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle \quad \forall \vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

BEVIS: (a) $\Rightarrow$ (b) LA $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$: $\|A\vec{x}\|^2 = (A\vec{x})^T(A\vec{x}) = (\vec{x}^T A^T)(A\vec{x}) = \vec{x}^T(A^TA)\vec{x} \underset{\text{A ORTOGONAL}}{=} \vec{x}^T\vec{x} = \|\vec{x}\|^2$

(b) $\Rightarrow$ (c) LA $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$. $4\langle A\vec{x}, A\vec{y}\rangle = \|A\vec{x} + A\vec{y}\|^2 - \|A\vec{x} - A\vec{y}\|^2$

$$= \|A(\vec{x}+\vec{y})\|^2 - \|A(\vec{x}-\vec{y})\|^2 \underset{(b)}{=} \|\vec{x}+\vec{y}\|^2 - \|\vec{x}-\vec{y}\|^2 = 4\langle \vec{x}, \vec{y}\rangle$$

(c) $\Rightarrow$ (a) MÅ VISE AT $(A^TA - I)\vec{x} = \vec{0} \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$

LA $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$: $\langle A\vec{x}, A\vec{y}\rangle = (A\vec{x})^T(A\vec{y}) = \vec{x}^T(A^TA\vec{y}) = \langle \vec{x}, A^TA\vec{y}\rangle \overset{(c)}{=} \langle \vec{x}, \vec{y}\rangle$

$\Rightarrow \langle \vec{x}, (A^TA - I)\vec{y}\rangle = 0$

VELG: $\vec{x} = (A^TA - I)\vec{y}$: $\Rightarrow \|(A^TA - I)\vec{y}\|^2 = 0 \quad \forall \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow (A^TA - I)\vec{y} = 0 \quad \forall \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

$\square$

TM 7.15: LA P VÆRE TRANSISJONSMATRISEN MELLOM TO ORTONORMALE BASISER FOR $\mathbb{R}^n$, SÅ ER P EN ORTOGONAL MATRISE.

BEVIS: NOK Å VISE $\|P\vec{x}\| = \|\vec{x}\| \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^n$ (IFØLGE TM 7.13)

LA $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ OG $B = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$ EN ORTONORMAL BASIS FOR $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow \exists c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ SÅ. $\vec{x} = c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_n\vec{v}_n$

$$\|\vec{x}\|^2 = \|c_1\vec{v}_1 + c_2\vec{v}_2 + \dots + c_n\vec{v}_n\|^2 = |c_1|^2\|\vec{v}_1\|^2 + |c_2|^2\|\vec{v}_2\|^2 + \dots + |c_n|^2\|\vec{v}_n\|^2$$

$$= c_1^2 + c_2^2 + \dots + c_n^2$$

$$= \|[\vec{x}]_B\|^2. \quad (*)$$

SIDEN $\|\vec{v}_i\| = 1 \ \forall i$ OG $\langle \vec{v}_i, \vec{v}_j\rangle = 0 \ \forall i \neq j$.

LA B OG B' VÆRE TO ORTONORMALE BASISER FOR $\mathbb{R}^n$

$\Rightarrow [\vec{x}]_{B'} = P_{B\to B'}[\vec{x}]_B$

$\Rightarrow \|\vec{x}\|^2 = \|[\vec{x}]_{B'}\|^2 = \|P_{B\to B'}[\vec{x}]_B\|^2 = \|[\vec{x}]_B\|^2$ IFØLGE $(*)$.

SIDEN TIL HVER $\vec{y} \in \mathbb{R}^n$ FINNES DET $\vec{z} \in \mathbb{R}^n$ SLIK AT $[\vec{z}]_B = \vec{y}$

FØLGER DET AT $\|P_{B\to B'}\vec{y}\| = \|\vec{y}\| \quad \forall \vec{y} \in \mathbb{R}^n$

DEF 7.2.1: EN KVADRATISK MATRISE A ER ORTOGONAL DIAGONALISERBAR HVIS DET EKSISTERER P ORTOGONAL SÅ $P^T A P = D$ DER D ER EN DIAGONALMATRISE

TM 7.2.1: LA A VÆRE EN $n \times n$ MATRISE. FØLGENDE ER EKVIVALENT

(a) A ER ORTOGONAL DIAGONALISERBAR

(b) A HAR EN ORTOGONALMENGDE AV n EGENVEKTORER

(c) A ER SYMMETRISK.

BEVIS (a)$\Leftrightarrow$(b) FØLG BEVISET TIL TM 5.2.1

(a) $\Rightarrow$ (c) A ORTOGONAL DIAGONALISERBAR $\Rightarrow \exists P$ ORTOGONAL OG D DIAGONALMATRISE

SÅ $P^T A P = D \Rightarrow A = (P^T)^{-1} D P^{-1} \underset{\uparrow}{=} P D P^T$

P ORTOGONAL

$\Rightarrow A^T = (PDP^T)^T = (P^T)^T D^T P^T = PDP^T = A$, DVS A SYMMETRISK

(c) $\Rightarrow$ (a) DELES OPP I FLERE STEG:

STEG 1: ALLE EGENVERDIER TIL A ER REELLE.

ANTA A HAR EN EGENVERDI $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

$\Rightarrow (A - \lambda I)\vec{x} = \vec{0}$ HAR EN KOMPLEKS LØSNING $\vec{x_0} \neq \vec{0}$

$\vec{x_0}$... EGENVEKTOR TIL λ

$\Rightarrow \overline{(A - \lambda I)}\overline{\vec{x_0}} = \vec{0} \sim \bar{\lambda}$ ER OGSÅ EN EGENVERDI MED EGENVEKTOR $\overline{\vec{x_0}}$

ANTA $\vec{x_0} = (x_1, x_2, .., x_n)$ MED $x_i \in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow 0 \neq \lambda(|x_1|^2 + |x_2|^2 + .. + |x_n|^2) = \lambda(x_1\bar{x}_1 + x_2\bar{x}_2 + .. + x_n\bar{x}_n)$$
$$= ((\lambda x_1)\bar{x}_1 + (\lambda x_2)\bar{x}_2 + .. + (\lambda x_n)\bar{x}_n)$$
$$= ((A\vec{x})_1\bar{x}_1 + (A\vec{x})_2\bar{x}_2 + .. + (A\vec{x})_n\bar{x}_n)$$

SJEKK SELV

$$= (x_1(\overline{A\vec{x}})_1 + x_2(\overline{A\vec{x}})_2 + .. + x_n(\overline{A\vec{x}})_n)$$
$$= (x_1(\bar{\lambda}\bar{x}_1) + x_2(\bar{\lambda}\bar{x}_2) + .. + x_n(\bar{\lambda}\bar{x}_n))$$
$$= \bar{\lambda}(|x_1|^2 + |x_2|^2 + .. + |x_n|^2)$$

SIDEN $\lambda \neq 0$ OG $(|x_1|^2 + |x_2|^2 + .. + |x_n|^2) \neq 0$ FØLGER DET AT $\lambda = \bar{\lambda}$, DVS $\lambda \in \mathbb{R}$.

STEG 2: EGENVEKTORER TIL FORSKJELLIGE EGENROM ER ORTOGONALE.

LA λ_1 OG λ_2 VÆRE TO FORSKJELLIGE EGENVERDIER OG $\vec{v_1}, \vec{v_2} \in \mathbb{R}^n$

SÅ $A\vec{v_1} = \lambda_1 \vec{v_1}$ OG $A\vec{v_2} = \lambda_2 \vec{v_2}$

$$\Rightarrow \lambda_1 \langle \vec{v_1}, \vec{v_2} \rangle = \langle A\vec{v_1}, \vec{v_2} \rangle \underset{\uparrow}{=} \langle \vec{v_1}, A\vec{v_2} \rangle = \lambda_2 \langle \vec{v_1}, \vec{v_2} \rangle$$

A SYMMETRISK

SIDEN $\lambda_1 \neq \lambda_2$ FØLGER DET AT $\langle \vec{v_1}, \vec{v_2} \rangle = 0$

STEG 3: A ER ORTOGONAL DIAGONALISERBAR

LA λ_1 VÆRE EN EGENVERDI TIL A MED TILHØRENDE EGENVEKTOR $\vec{v}_1$

$\Rightarrow \{\vec{v}_1\}$ KAN UTVIDES TIL EN ORTONORMAL BASIS FOR $\mathbb{R}^n$ $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n\}$

·) $0 = \lambda_1 \langle \vec{v}_1, \vec{v}_j \rangle = \langle A\vec{v}_1, \vec{v}_j \rangle = \langle \vec{v}_1, A\vec{v}_j \rangle$ FOR $j \neq 1$.

·) DVS: $A\vec{v}_j \in \operatorname{span}\{\vec{v}_2, \vec{v}_3, \dots, \vec{v}_n\} \quad \forall j \neq 1$

·) LA $P = (\vec{v}_1 \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)$... ORTOGONAL MATRISE

$$\Rightarrow AP = (A\vec{v}_1, A\vec{v}_2, \dots, A\vec{v}_n) = (\lambda_1\vec{v}_1, A\vec{v}_2, \dots, A\vec{v}_n)$$

$$= (\vec{v}_1 \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n)\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \; 0 \dots 0 \\ 0 & \\ \vdots & \boxed{*} \\ 0 & \end{pmatrix} = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \; 0 \dots 0 \\ 0 & \\ 0 & \boxed{*} \\ \vdots & \\ 0 & \end{pmatrix} = P\tilde{A}$$

SIDEN ·) $A_1\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1 = \lambda_1\vec{v}_1 + 0\,\vec{v}_2 + \dots + 0 \cdot \vec{v}_n = P\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

·) $j \neq i$ $\quad A\vec{v}_j \in \operatorname{span}\{\vec{v}_2, \dots, \vec{v}_j\}$

$\Rightarrow \exists\, c_{2j}, c_{3j}, \dots, c_{nj}$ SÅ

$$A\vec{v}_j = 0 \cdot \vec{v}_1 + c_{2j}\vec{v}_2 + c_{3j}\vec{v}_3 + \dots + c_{nj}\vec{v}_n = P\begin{pmatrix} 0 \\ c_{2j} \\ \vdots \\ c_{nj} \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow P^TAP = \tilde{A}$ OG $\tilde{A}$ ER SYMMETRISK.

SIDEN $(\tilde{A})^T = (P^TAP)^T = P^TA^T(P^T)^T = P^TAP = \tilde{A}$.

·) $P^TAP = \tilde{A} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \; 0 \dots 0 \\ 0 & \\ \vdots & \boxed{\tilde{A}_1} \\ 0 & \end{pmatrix}$ DER $\tilde{A}_1$ ER EN SYMMETRISK $(n-1)\times(n-1)$ MATRISE.

OBSERVASJON HVIS $\tilde{A}_1$ ER ORTOGONAL DIAGONALISERBAR

$\Rightarrow \exists\, \tilde{P}_1$ ORTOGONAL OG $\tilde{D}_1$ DIAGONALMATRISE SÅ $\tilde{P}_1^T \tilde{A}_1 \tilde{P}_1 = \tilde{D}_1$

DANN DEN ORTOGONALE MATRISEN $\tilde{P}$:

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \; 0 \dots 0 \\ 0 & \\ \vdots & \boxed{\tilde{P}_1} \\ 0 & \end{pmatrix} \quad \text{OG} \quad \tilde{D} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \dots 0 \\ 0 & \\ \vdots & \boxed{\tilde{D}_1} \\ 0 & \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \tilde{A}\tilde{P} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \dots 0 \\ 0 & \\ \vdots & \boxed{\tilde{A}_1\tilde{P}_1} \\ 0 & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \dots 0 \\ 0 & \\ \vdots & \boxed{\tilde{P}_1\tilde{D}_1} \\ 0 & \end{pmatrix} = \tilde{P}\tilde{D}$$

$\Rightarrow$ HVIS RESULTATET ER RIKTIG FOR $(n-1)\times(n-1)$ MATRISER SÅ KAN VI VISE AT RESULTATET ER RIKTIG FOR $n\times n$ MATRISER.

$\Rightarrow$ DET ER EN INDUKSJON

$\leadsto$ MÅ VISE AT RESULTAT ER RIKTIG FOR 2×2 MATRISER.

STEG 4: RESULTATET ER RIKTIG FOR 2×2 MATRISER.

LA: $A=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ MED $a,b,c \in \mathbb{R}$.

•) EGENVERDIER $(a-\lambda)(c-\lambda)-b^2=0$

$$\lambda^2-(a+c)\lambda+ac-b^2=0$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{a+c}{2}\pm\sqrt{\frac{(a-c)^2}{2}+b^2}$$

-) $b=0$ DIAGONALMATRISE $\Rightarrow$ FERDIG

-) $b\neq 0$ EGENVERDIENE ER ULIK, DVS $\lambda_1\neq\lambda_2$

$\xRightarrow[\text{BEVIS AV TM 5.2.1}]{\text{STEG 2}}$ A ER ORTOGONAL DIAGONALISERBAR

□

TM 7.2.2: LA A VÆRE EN SYMMETRISK MATRISE, SÅ GJELDER

(a) ALLE EGENVERDIER TIL A ER REELLE

(b) EGENVEKTORER TIL FORSKJELLIGE EGENROM ER ORTOGONALE

EKS:

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A-\lambda I)=\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 4-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 4-\lambda \\ 2 & 2 \end{vmatrix}$$

$$=(4-\lambda)^3-4(4-\lambda)-4(4-\lambda)+8+8-4(4-\lambda)$$

$$=(4-\lambda)^3-12(4-\lambda)+16=0.$$

$$=-\lambda^3+12\lambda^2-48\lambda+64-48+12\lambda+16$$

$$=-\lambda^3+12\lambda^2-36\lambda+32$$

$$=-(\lambda-2)^2(\lambda-8)$$

EGENVEKTORS: $\lambda=8$

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -3 & 3 \\ 0 & 3 & -3 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \to \frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\lambda=2$:

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{v}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \vec{v}_2=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ IKKE ORTOGONAL $\to$ GRAM SCHMIDT

$$\vec{u}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u}_2=\vec{v}_2-\frac{\langle \vec{u}_1,\vec{v}_2\rangle}{\|\vec{u}_1\|^2}\vec{u}_1=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}-\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

ORTONORMAL BASIS $\left\{\frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|}, \frac{\vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|}\right\}$ $\quad \frac{\vec{u}_1}{\|\vec{u}_1\|}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\vec{u}_2}{\|\vec{u}_2\|}=\sqrt{\frac{3}{2}}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow P=\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{3}{8}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & -\sqrt{\frac{3}{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}}, & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \sqrt{\frac{3}{8}} \end{pmatrix} \qquad D=\begin{pmatrix} 8 & & 0 \\ & 2 & \\ 0 & & 2 \end{pmatrix}$$

$\downarrow$

ORTOGONAL!