10.4 Komplekse vektorrom

HØGSKOLEN I SØR-TRØNDELAG

* Et vektorrom der skalarene er komplekse tall, kalles et komplekst vektorrom.
* Lineære kombinasjoner av vektorer i et komplekst vektorrom er på formen

$$w = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \dots + k_r v_r,$$

der $k_1, k_2, \dots, k_r$ er komplekse tall.
* Begrepene lineær uavhengighet, span, basis, dimensjon og underrom kan videreføres direkte til komplekse vektorrom.

Eks. $\mathbb{C}^n$ er et komplekst vektorrom.

$u \in \mathbb{C}^n$ $\quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$ el. $u = (u_1, \dots, u_n)$

der $u_1 = a_1 + ib_1, \dots, u_n = a_n + ib_n$ og $i = \sqrt{-1}$.

Standard basis i $\mathbb{C}^n$ er den samme som i $\mathbb{R}^n$, dvs.

$$e_1 = (1, 0, \dots, 0), \; e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0), \dots, e_n = (0, \dots, 0, 1)$$

$\square$

Eks. Lineær kombinasjon i $\mathbb{C}^2$.

$u = \begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix}$ $\quad v = \begin{bmatrix} 1+i \\ 0 \end{bmatrix}$ $\quad \lambda = 1-i, \; \mu = 2$ $\qquad i^2 = -1$

$$\lambda u + \mu v = (1-i)\begin{bmatrix} 1 \\ -2i \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 1+i \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-i) + 2(1+i) \\ -(1-i)2i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3+i \\ -2-2i \end{bmatrix}$$

Eks. kompleks M_{mn}

M_{mn} er vektorrommet av $m \times n$-matriser der elementene er reelle tall

kompleks M_{mn} —— " —————— er komplekse tall.

Oppg. 10.4.13 La $T: \mathbb{C}^3 \to \mathbb{C}^3$ være en lineær operator definert ved $T(x) = Ax$, $x \in \mathbb{C}^3$

der
$$A = \begin{bmatrix} i & -i & -1 \\ 1 & -i & 1+i \\ 0 & 1-i & 1 \end{bmatrix}.$$

Finn kjernen og nulliteten til T.

Løsning:

Kjerne: $\ker(T) = \{ x \in \mathbb{C}^3 : T(x) = 0 \}$
$= \{ x \in \mathbb{C}^3 : Ax = 0 \}$ = nullrommet til A
$= \{$ løsningsmengden til $Ax = 0 \}$

Dvs. vi løser $Ax = 0$ for å finne kjernen.

(I) $i x_1 - i x_2 - x_3 = 0$

(II) $x_1 - i x_2 + (1+i) x_3 = 0$

(III) $(1-i) x_2 + x_3 = 0$

III: $x_3 = -(1-i) x_2$

II: $x_1 = i x_2 - (1+i) x_3 = i x_2 + (1+i)(1-i) x_2$
$= (i+2) x_2$

I: $i((i+2) x_2) - i x_2 - (-(1-i)) x_2 = 0$
$-x_2 + 2i x_2 - i x_2 + x_2 - i x_2 = 0 \iff x_2 \cdot 0 = 0 \Rightarrow x_2 = s$

$$x_1 = (i+2)\cdot s$$
$$x_2 = s \qquad \Rightarrow \qquad x = s\begin{bmatrix} i+2 \\ 1 \\ i-1 \end{bmatrix}, \quad s \in \mathbb{C}$$
$$x_3 = -(1-i)s$$

Kjernen består av alle vektorer av type

$$s\begin{bmatrix} i+2 \\ 1 \\ i-1 \end{bmatrix}, \text{ der } s \in \mathbb{C}.$$

$$\text{nullity}(T) = \dim(\ker(T)) = \underline{\underline{1}}.$$

Husk for $\mathbb{R}^n$: $\|u\| = (u\cdot u)^{1/2} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}$

La $u = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$

Med "vanlig" euklidsk indreprodukt blir lengden:

$\|u\| = (u\cdot u)^{1/2} = \sqrt{1\cdot 1 + i\cdot i} = 0$ ← feil!! ulogisk med lengde lik 0 når $u \neq 0$.

Komplekst euklidsk indreprodukt.

Gitt $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$ og $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^n$

Det komplekse indreproduktet av u og v er

kompleks konjugerte

$$u\cdot v = u_1\overline{v_1} + u_2\overline{v_2} + \dots + u_n\overline{v_n}, \quad \text{der } \overline{z} = a - ib$$
$$z = a + ib$$

Eks. $u = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ $\quad \|u\| = (u\cdot v)^{1/2} = \sqrt{1\cdot\overline{1} + i\cdot\overline{i}} = \sqrt{1 + i(-i)} = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$

$v = \begin{pmatrix} -i \\ i \end{pmatrix}$ $\quad u\cdot v = 1\cdot\overline{(-i)} + i\cdot\overline{1} = i + i = \underline{\underline{2i}}$

Teorem 10.4.1 Gitt u, v, w vektorer i $\mathbb{C}^n$ og k et komplekst tall.

(a) $u \cdot v = \overline{v \cdot u}$

(b) $(u+v)\cdot w = u \cdot w + v \cdot w$

(c) $(ku)\cdot v = k(u \cdot v)$

(d) $v \cdot v \geq 0$ og $v \cdot v = 0 \Leftrightarrow v = 0$

$\left.\right\}$ samme som for det euklidske reelle indrepr. (kap 4.1, Teor. 4.1.2)

Bevis (a):
$$\overline{u \cdot v} = \overline{u_1\overline{v_1} + u_2\overline{v_2} + \cdots + u_n\overline{v_n}}$$
$$= \overline{u_1\overline{v_1}} + \overline{u_2\overline{v_2}} + \cdots + \overline{u_n\overline{v_n}}$$
$$= \overline{u_1}\,\overline{\overline{v_1}} + \overline{u_2}\,\overline{\overline{v_2}} + \cdots + \overline{u_n}\,\overline{\overline{v_n}}$$

dobbel konjugert = ikke —"—

$$= v_1\overline{u_1} + v_2\overline{u_2} + \cdots + v_n\overline{u_n} = v \cdot u$$

Norm og avstand i $\mathbb{C}^n$

$u_i\overline{u_i} = |u_i|^2$

$$\|u\| = (u \cdot u)^{1/2} = \sqrt{u_1\overline{u_1} + u_2\overline{u_2} + \cdots + u_n\overline{u_n}} = \sqrt{|u_1|^2 + \cdots + |u_n|^2}$$

(Hvis $z = a + ib$, $z \in \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$

$|z| = \sqrt{a^2+b^2}$, $\overline{z} = a - ib$

$z \cdot \overline{z} = (a+ib)(a-ib) = a^2 + iba - aib - ib \cdot ib = a^2 + b^2$)

$$d(u,v) = \|u - v\| = \sqrt{|u_1 - v_1|^2 + |u_2 - v_2|^2 + \cdots + |u_n - v_n|^2}$$

Eks. $u = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix}$, $\|u\| = \sqrt{2}$ (regnet over)

$$d(u,v) = \|u - v\|$$
$$= \sqrt{|1+i|^2 + |i-1|^2}$$
$$= \sqrt{1^2+1^2+(-1)^2+1^2} = \sqrt{4} = \underline{\underline{2}}$$