10.5 Komplekse indreproduktrom

Def. Et indreprodukt i et komplekst vektorrom V er en funksjon som til hvert par av vektorer u og v assosierer et komplekst tall $\langle u,v \rangle$.
Funksjonen er s.a. følgende egenskaper er tilfredsstilt for alle $u,v,w \in V$ og k komplekst tall:

(1) $\langle u,v \rangle = \overline{\langle v,u \rangle}$

(2) $\langle u+v,w \rangle = \langle u,w \rangle + \langle v,w \rangle$

(3) $\langle ku,v \rangle = k \langle u,v \rangle$

(4) $\langle v,v \rangle \geq 0$ og $\langle v,v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$.

Et komplekst vektorrom med et indreprodukt kalles et komplekst indreproduktrom.

Man kan også bevise at:

(a) $\langle 0,v \rangle = \langle v,0 \rangle = 0$

(b) $\langle u,v+w \rangle = \langle u,v \rangle + \langle u,w \rangle$

(c) $\langle u,kv \rangle = \bar{k} \langle u,v \rangle$

Bevis (c): $\langle u,kv \rangle \overset{(1)}{=} \overline{\langle kv,u \rangle} \overset{(3)}{=} \overline{k\langle v,u \rangle} = \bar{k}\, \overline{\langle v,u \rangle} \overset{(1)}{=} \bar{k} \langle u,v \rangle$

Eksempel: kompleks M_{mn}

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}$$

$$\langle U, V \rangle = u_{11}\overline{v_{11}} + u_{12}\overline{v_{12}} + u_{21}\overline{v_{21}} + u_{22}\overline{v_{22}}$$

La $$U = \begin{bmatrix} 1+i & 0 \\ 1 & i \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$$

$$\langle U, V \rangle = (1+i)\cdot\overline{1} + 0\cdot\overline{i} + 1\cdot(\overline{-i}) + i\cdot\overline{1}$$

$$= 1 + i + i + i = \underline{\underline{1+3i}}$$

Eksempel: kompleks $C[a,b]$

komplekse $C[a,b] = \{$ kontinuerlige funksjoner $f(x) = f_1(x) + i f_2(x)$ med reelle variable og komplekse verdier $\}$

Vi kan definere integralet for slike funksjoner:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + i \int_a^b f_2(x)\,dx$$

Da kan integralet brukes for å definere et indreprodukt på $C[a,b]$. La $g(x) = g_1(x) + i g_2(x) \in C[a,b]$

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f\,\overline{g}\,dx = \int_a^b [f_1(x) + i f_2(x)]\,\overline{[g_1(x) + i g_2(x)]}\,dx$$

$$= \int_a^b [f_1(x) + i f_2(x)][g_1(x) - i g_2(x)]\,dx$$

$$= \int_a^b f_1(x) g_1(x) + f_2(x) g_2(x)\,dx + i \int_a^b f_2(x) g_1(x) - f_1(x) g_2(x)\,dx$$

Det kan verifiseres at dette er et indreprodukt i kompleks $C[a,b]$. $\square$

Norm og avstand er det samme som for reelle indreprodukt, dvs. $\|u\| = \langle u,u\rangle^{1/2}$

$d(u,v) = \|u-v\|$.

Oppg. 10.5.40 Gitt $f = x$ og $g = 1 + ix$ i $C[0,1]$ med indreprodukt $\langle f,g\rangle = \int_a^b f\,\overline{g}\,dx$, beregn

a) $\|g\|$ b) $\langle f,g\rangle$ c) $\langle g,f\rangle$

a) $$\|g\| = \langle g,g\rangle^{1/2} = \Big(\int_0^1 \underbrace{(1+ix)}_{g}\,\underbrace{\overline{(1+ix)}}_{\overline{g}}\,dx\Big)^{1/2}$$

$$= \Big(\int_0^1 (1+ix)(1-ix)\,dx\Big)^{1/2} = \Big(\int_0^1 (1+x^2)\,dx + i\int_0^1 x - x\,dx\Big)^{1/2}$$

$$= \Big(1 + \int_0^1 x^2\,dx\Big)^{1/2} = \Big(1 + \tfrac{1}{3}x^3\Big|_0^1\Big)^{1/2} = \dots = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

b) $f = f_1 + if_2$, $f_1 = x$, $f_2 = 0$

$g = g_1 + ig_2$, $g_1 = 1$, $g_2 = x$

$$\langle f,g\rangle = \int_0^1 x\,dx + i\int_0^1 1\cdot 0 - x\cdot x\,dx$$

$$= \frac{1}{2} - i\int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{2} - i\cdot\frac{1}{3}$$

c) $$\langle g,f\rangle = \overline{\langle f,g\rangle} = \overline{\frac{1}{2} - \frac{i}{3}} = \frac{1}{2} + \frac{i}{3}$$