10.6 Unitære, hermitske og normale matriser.

HØGSKOLEN
I SØR-TRØNDELAG

Def. Gitt A kompleks matrise, matrisen A^* gitt av $A^* = \bar{A}^T$ kalles den konjugert-transponerte av A. ⌶

Eks. $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -1 & -i \end{pmatrix}$ $\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -1 & i \end{pmatrix}$, $A^* = \bar{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -i & i \end{pmatrix}$

Den konjugert-transponerte er analogen til den transponerte i tilfellet reelle matriser.

Følgende egenskaper gjelder (Teor. 10.6.1)

a) $(A^*)^* = A$

b) $(A+B)^* = A^* + B^*$

c) $(kA)^* = \bar{k} A^*$

d) $(AB)^* = B^* A^*$

Vi skal nå definere unitære matriser, som er den komplekse analogen til ortogonale matriser ($A^{-1} = A^T$)

Def. A er en kompleks $m \times n$-matrise. A er unitær hvis

$$\boxed{A^{-1} = A^*}$$

Teorem 10.6.2: A $n \times n$ kompleks matrise, da er følgende ekvivalenter:

a) A er unitær

b) rad-vektorene i A er en ortonormal mengde i $\mathbb{C}^n$ med hensyn på det euklidske indreproduktet.

c) søylevektorene i A er en ortonormal mengde i $\mathbb{C}^n$ mhp. det euklidske indreproduktet.

HØGSKOLEN I SØR-TRØNDELAG

Oppg. 10.6.4 b)

$$A = \begin{array}{cc} \left[\begin{array}{cc} i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{array}\right] & \begin{array}{c} r_1 \\ r_2 \end{array} \\ \begin{array}{cc} c_1 & c_2 \end{array} & \end{array}$$

$$\langle c_1, c_2 \rangle \overset{\text{Euklidsk indreprodukt}}{=} \frac{i}{\sqrt{2}} \cdot \overline{\frac{1}{\sqrt{2}}} + \left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\right) \cdot \overline{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{i}{2} - \frac{i}{2} = 0$$

$$\langle c_1, c_1 \rangle = \frac{i}{\sqrt{2}} \cdot \overline{\left(\frac{i}{\sqrt{2}}\right)} + \left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)\overline{\left(-\frac{i}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \|c_1\| = 1$$

$$\langle c_2, c_2 \rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \overline{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} + \frac{1}{\sqrt{2}} \overline{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \|c_2\| = 1$$

Siden kolonnene c_1 og c_2 utgjør en ortonormal mengde i $\mathbb{C}^2$ gir Teorem 10.6.2 at A er unitær og radene er ortonormale.

$A^{-1} = A^*$

Sjekker om A er unitær for moro skyld: $A^*A = I$,

$$A^* = \begin{bmatrix} -i/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}. \quad A^*A = \begin{bmatrix} -i/\sqrt{2} & i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -i/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}} = I$$

Matriser som er unitært diagonaliserbare:

Def. A $n \times n$ kompleks matrise er unitært diagonaliserbar hvis det finnes P unitær s.a. $P^{-1}AP = P^*AP$, diagonal matrise.

Def. En $n \times n$ kompleks matrise kalles for Hermitsk hvis

$$\boxed{A = A^*}$$

Eksempel

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & -5 \end{pmatrix} \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & -5 \end{pmatrix} \quad A^* = \bar{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & -5 \end{pmatrix} = A$$

mao. A er hermitsk.

Def. En $n \times n$-matrise kompleks kalles for normal hvis

$$AA^* = A^*A$$

Hvis A er hermitsk da er A også normal (men ikke viceversa)

$$(A = A^* \qquad AA^* = AA = A^*A)$$

Alle unitære matriser er normale $(AA^* = AA^{-1} = I = A^{-1}A = A^*A)$

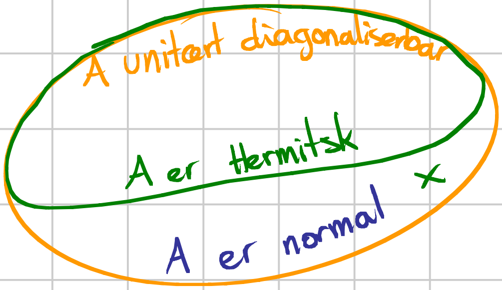
Komplekse analoge av resultatene: Teorem 7.3.1 og 7.3.2

Teorem 10.6.3 A $n \times n$ kompleks matrise, da er flg. ekvivalente:

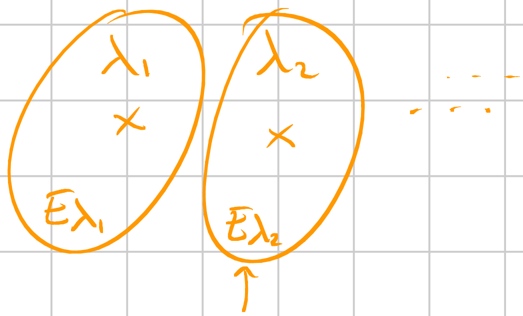
a) A unitært diagonaliserbar

b) A har en ortonormal mengde av n egenvektorer

c) A er normal



Teorem 10.6.4 Hvis A $n \times n$ er normal da er egenvektorene tilhørende distinkte egenrom ortogonale



For å diagonalisere en normal matrise:

1) Finn en basis for hvert egenrom av A.
2) Bruk Gram-Schmidt algoritmen for hver av disse basisene og finn like mange ortonormale basiser.
3) Sett sammen vektorene som søylevektorer i en matrise $\underline{P}$ som tilslutt vil unitær diagonalisere A.

$$P^* A P = D \text{ - diagonal.}$$

Oppgave 4a i MNFMA108 nov. 2000

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & i \\ 0 & -i & 2 \end{bmatrix}$$

Finn en inverterbar matrise som (unitær) diagonaliserer A.

A er hermitsk, dvs. $A = A^* = \bar{A}^T$

Finner egenverdiene $\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda-2 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & i \\ 0 & -i & \lambda-2 \end{vmatrix} = 0$

regner ut og får: $(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda-3) = 0$

$\lambda_1 = 2, \quad \lambda_2 = 1, \quad \lambda_3 = 3$

Egenvektorene:

$\lambda_1 = 2$: "By inspection": $A\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $v_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ er en basis for E_{λ_1}

$\lambda_2 = 1$: $\lambda_2 I - A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & i \\ 0 & -i & -1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ -i \\ \hookleftarrow \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $\quad \begin{matrix} x_1 = 0 \\ x_2 = i \cdot s \\ x_3 = s \end{matrix}$

$\tilde{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{bmatrix} \qquad v_2 = \dfrac{\tilde{v}_2}{\|\tilde{v}_2\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 0 \\ i \\ 1 \end{bmatrix}$

$\|\tilde{v}_2\| = \sqrt{i \cdot \bar{i} + 1 \cdot 1} = \sqrt{2}$

$\lambda_3 = 3$: $\lambda_3 I - A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & -i & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} \\ i \\ \hookleftarrow \end{matrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & i \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$\tilde{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -i \\ 1 \end{bmatrix} \qquad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ -i/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$

$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i/\sqrt{2} & -i/\sqrt{2} \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ unitær diagonaliserer A. (sjekk $P^*AP = D$)

Teorem 10.6.5 Egenverdiene til en hermitsk matrise er reelle.

Bevis Anta A hermitsk: $A^* = A$.

og λ, v s.a. $Av = \lambda v$ anta $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$

$v^* = (\bar{v}_1, \dots, \bar{v}_n)$

$$v^* A v = v^* \lambda v = \lambda v^* v$$

$$v^* v = \bar{v}_1 v_1 + \dots + \bar{v}_n v_n$$
$$= \|v\|^2 \text{ reell}$$

$$\frac{v^* A v}{\|v\|^2} = \lambda$$

Må vise $v^* A v$ reell

$$\to (v^* A v)^* = v^* A^* v^{**} \overset{v^{**} = v}{=} v^* A^* v \overset{A = A^*}{=} v^* A v$$

$$\overline{v^* A v} = v^* A v$$

er et reelt tall. $\square$