5.1 Reelle vektorrom

5.1 Generell definisjon av vektorrom

Def. La V være en ikke-tom mengde der "+" og "·" (gange en skalar) er definert.
V kalles et vektorrom hvis og bare hvis de følgende regler (aksiomer) for elementene i V er gyldige:

(1) $u, v \in V \Rightarrow u+v \in V$ $\quad (1,1), (3,-1) \in \mathbb{R}^2 \quad (1,1)+(3,-1) \in \mathbb{R}^2$

(2) $u+v = v+u$

(3) $u+(v+w) = (u+v)+w$

(4) $\exists\, 0 \in V$ s.a. $0+u = u+0 = u$

(5) $\forall u \in V \ \exists\, -u \in V$ s.a. $u+(-u) = (-u)+u = 0$

(6) k er en skalar, $u \in V \Rightarrow k \cdot u \in V$

(7) $k(u+v) = ku + kv$

(8) $(k+l)u = ku + lu$ $\quad k, l$ er skalare

(9) $k(l \cdot u) = (kl) \cdot u$

(10) 1 reelt tall $\quad 1 \cdot u = u$

Eksempel 1: $V = \mathbb{R}^n$ er et vektorrom

Eksempel 2: $V = M_{22}$ (rom av 2×2-matriser) er et vektorrom.

$$u = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \qquad v = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix}$$

(1) $$u+v = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} \\ v_{21} & v_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11}+v_{11} & u_{12}+v_{12} \\ u_{21}+v_{21} & u_{22}+v_{22} \end{bmatrix} \in M_{22}$$

(2) $$u+v = \begin{bmatrix} v_{11}+u_{11} & v_{12}+u_{12} \\ v_{21}+u_{21} & v_{22}+u_{22} \end{bmatrix} = v+u$$

(3) $u+(v+w) = (u+v)+w$ bevises ved å bruke $+$operasjon elementvis og assosiativitet av reelle tall.

(4) $$0+u \overset{\text{fra (2)}}{=} u+0 = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = u$$

(5) Gitt $u = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} \in M_{22}$

Da er $-u = \begin{bmatrix} -u_{11} & -u_{12} \\ -u_{21} & -u_{22} \end{bmatrix} \in M_{22}$ elementet som oppfyller aksiom 5.

(6) $k \cdot u = \begin{bmatrix} ku_{11} & ku_{12} \\ ku_{21} & ku_{22} \end{bmatrix} \in M_{22}$

distrib. av $\pm$ og $\cdot$ i reelle tall

(7) $k(u+v) = \begin{bmatrix} k(u_{11}+v_{11}) & k(u_{12}+v_{12}) \\ k(u_{21}+v_{21}) & k(u_{22}+v_{22}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ku_{11}+kv_{11} & ku_{12}+kv_{12} \\ ku_{21}+kv_{21} & ku_{22}+kv_{22} \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} ku_{11} & ku_{12} \\ ku_{21} & ku_{22} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} kv_{11} & kv_{12} \\ kv_{21} & kv_{22} \end{bmatrix} = ku + kv$

(8) $(k+l)u = ku + lu$ (omtrent som over)

bruker at multiplikasjon av reelle tall er assosiativ.

(9) $(k \cdot l)u = \begin{bmatrix} (kl)u_{11} & (kl)u_{12} \\ (kl)u_{21} & (kl)u_{22} \end{bmatrix} = \dots = k \cdot (lu)$

(10) $1u = \begin{bmatrix} 1u_{11} & 1u_{12} \\ 1u_{21} & 1u_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} \\ u_{21} & u_{22} \end{bmatrix} = u$ ✓

puh!

Eksempel 3: Rom av funksjoner på $\mathbb{R}$

Gitt funksjonene $f = f(x)$, $g = g(x)$

Addisjon: $f+g$ er funksjonen s.a. $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

Multiplikasjon av en skalar k: $k \cdot f$ er funksjonen s.a.
$(k \cdot f)(x) = k \cdot f(x)$

Med disse to operasjonene er mengden ~~rommet~~ av funksjoner over $\mathbb{R}$ et vektorrom.

Nullelementet er da funksjonen 0 s.a. $0(x) = 0 \quad \forall x$

Negativ av f er $(-f)$, funksjonen s.a. $(-f)(x) = -f(x) \quad \forall x$

Hvis $f(x) = \sin(x)$, hva er da $-f$? $(-f)(x) = -\sin x$.

Eksempel 4: En mengde som ikke er et vektorrom

La $V = \mathbb{R}^2$ med følgende operasjoner

vanlig addisjon: $u + v = (u_1 + v_1, u_2 + v_2)$

multiplikasjon: $k \cdot u = (ku_1, 0)$

Sjekker aksiom 10:

$$1 \cdot u = 1 \cdot (u_1, u_2) = (1u_1, 0) = (u_1, 0) \neq u$$

ikke oppfylt!

Eksempel 5: Nullvektorrom

$V = \{0\}$ bare et element, som er nullelementet.

s.a. $0 + 0 = 0 \in V$

$k \cdot 0 = 0 \in V$

V er et vektorrom.

Konsekvenser av vektorrom aksiomer: Teorem 5.1.1 s. 226

Hvis V er et vektorrom gjelder

(a) 0 skalar, $u \in V$: $0 \cdot u = 0 \in V$ (nullelementet)

(b) k skalar $0 \in V$, nullelementet $k \cdot 0 = 0$ (— " —)

(c) (-1) skalar $u \in V$ $(-1) \cdot u = -u$ (negative av u)

(d) Hvis $k \cdot u = 0 \in V$, da er enten $k = 0$ eller $u = 0 \in V$.

Bevis Merk at vi bare har lov til å bruke aksiomene i def. av vektorrom.

(a) $0 \cdot u + 0 \cdot u \overset{\text{aks. 8}}{=} (0+0) \cdot u = 0 \cdot u$

Adder $-0u$ (siden $0u \in V$ eksisterer $-0u$) til begge sider:

$$(0 \cdot u + 0 \cdot u) + (-0u) = 0 \cdot u + (-0u)$$

aks. 5

$$0 \cdot u + \underbrace{(0 \cdot u + (-0 \cdot u))}_{0} = 0$$

$$0 \cdot u + 0 = 0 \overset{\text{aks. 4}}{\Rightarrow} 0 \cdot u = 0$$