20.& 24. januar 2006

HØGSKOLEN I SØR-TRØNDELAG

5.4 basis og dimensjon

Def. av basis

La V være et vektorrom og $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ en mengde vektorer i V, da er S en basis for V hvis og bare hvis

a) S er lineært uavhengig ("ikke for mange")

b) S genererer V ("mange nok")

Teorem 5.4.1 Entydighet av basis-representasjon

Hvis $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ er en basis for et vektorrom V da kan alle $v \in V$ skrives som

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$$

på en entydig måte.

Bevis

Siden S er en basis er alle $v \in V$ en lin.komb. av elementene i S. Vi skal vise at en slik lin.komb. er entydig.

Anta
$$v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$$
$$v = k_1 v_1 + \dots + k_n v_n$$

Ved å trekke den andre lign. fra den første fåes

$$0 = (c_1 - k_1) v_1 + \dots + (c_n - k_n) v_n$$

og siden $v_1, \dots, v_n$ er l.ua. får man $c_1 - k_1 = 0, \dots, c_n - k_n = 0$

dvs. $c_1 = k_1, \ldots, c_n = k_n$, slik at de to lineære komb. for v er like.

Koordinater med hensyn på en basis S

Gitt $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$, en basis for V og

$$v = c_1 v_1 + \cdots + c_n v_n \quad ,$$

den entydige representasjonen av v mhp. S, da kalles $c_1, c_2, \ldots, c_n$ for koordinater relativt til basisen S.

Vektoren $(c_1, c_2, \ldots, c_n) \in \mathbb{R}^n$ kalles for koordinatvektoren relativt S, vi skriver

$$(v)_S = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

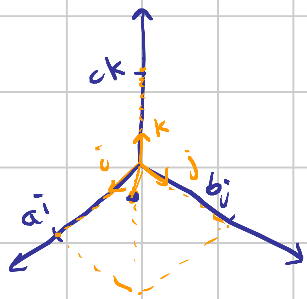
Eksempel (kanonisk/standard basis i $\mathbb{R}^3$)

$i = (1,0,0)$, $j = (0,1,0)$, $k = (0,0,1)$ er lineært uavhengige vektorer i $\mathbb{R}^3$ og i tillegg for alle $v \in \mathbb{R}^3$

$$v = ai + bj + ck = (a,0,0) + (0,b,0) + (0,0,c) = (a,b,c)$$

$S = \{i, j, k\}$ er da en basis for $\mathbb{R}^3$, den kalles for kanonisk (eller standard) basis for $\mathbb{R}^3$

a, b, c er koordinater til v relativt til den kanoniske basisen. og $(v)_S = (a,b,c)$ er koordinatens vektor. Vi ser at $v = (v)_S$



Eksempel kanonisk / standard basis for $\mathbb{R}^n$

Generalisering av forrige eksempel.

$e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $e_n = (0, \ldots, 0, 1)$

$S = \{e_1, \ldots, e_n\}$, S er lin. uavh. og

$\forall \; v \in \mathbb{R}^n \qquad v = c_1 e_1 + c_2 e_2 + \ldots + c_n e_n$

S kalles for standardbasis for $\mathbb{R}^n$, koordinatene til v relativt til S er $c_1, c_2, \ldots, c_n$ og

$$(v)_S = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

også her: $v = (v)_S$.

Eksempel: Bevis at $v_1 = (1,1,1)$, $v_2 = (1,0,1)$, $v_3 = (0,1,1)$ er en basis for $\mathbb{R}^3$.

$\forall \; b \in \mathbb{R}^3$ må da være

(genererer) $\qquad b = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3$

(l. ua) $\quad$ og hvis $0 = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 \Rightarrow c_1 = c_2 = c_3 = 0$

$$(b_1, b_2, b_3) = \underbrace{(c_1 + c_2, \; c_1 + c_3, \; c_1 + c_2 + c_3)}_{c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3 \, = \, c_1(1,1,1) + c_2(1,0,1) + c_3(0,1,1)}$$

dvs. $c_1 + c_2 = b_1$

$c_1 + c_3 = b_2 \quad \Rightarrow Ac = b \qquad A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

$c_1 + c_2 + c_3 = b_3$

hvis $Ac = b$ har løsning for alle b og $Ac = 0$ har $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ som eneste løsning, da er v_1, v_2, v_3 en basis. Dette betyr at $\det(A) \neq 0 \Rightarrow v_1, v_2, v_3$ er en basis.

og siden $\det(A) = -1$, er kravet $\det(A) \neq 0$ oppfylt og v_1, v_2, v_3 er en basis.

Eksempel La $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ v_1, v_2, v_3 som forrige eks.

a) Finn $(v)_S$ for $v = (1, 0, -1)$ $\qquad ((v)_S \neq v)$

b) Finn en $w \in \mathbb{R}^3$ s.a. $(w)_S = (-1, 3, 2)$

Løsn.: a) Dvs. finn c_1, c_2, c_3 s.a.

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + c_3 v_3$$

$$(1, 0, -1) = c_1 (1, 1, 1) + c_2 (1, 0, 1) + c_3 (0, 1, 1)$$

Vi løser $Ac = b$ med $b = v = (1, 0, -1)$

$$(v)_S = (c_1, c_2, c_3) = (2, -1, -2)$$

b) Her er $(c_1, c_2, c_3) = (-1, 3, 2)$

$$Ac = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \quad \text{dvs.} \quad \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}}} \in \mathbb{R}^3$$

Eksempel:

$S = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\}$ er en basis for $\mathbb{P}_n = \{$polynomer av grad $\leq n\}$

Gitt $p = a_0 + a_1 x + a_2 x^2$ og $S = \{1, x, x^2\}$

$$(p)_S = (a_0, a_1, a_2)$$

$\square$

Eksempel

En basis for $\overbrace{\text{matrisene}}^{2\times 3-}$ er

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$M_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_5 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad M_6 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

Dvs. for M_{nm} $\overbrace{\text{er alle}}^{\text{en basis}}$ $n\times m$-matrisene med et element lik 1 og de andre lik 0.

Eksempel

Gitt $S = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ en lineart uavhengig mengde i et vektorrom V. Da er S en basis for $\text{span}\{S\}$.

Def. V er et vektorrom, $V \neq \{0\}$ kalles for **endeligdimensjonalt** hvis det fins $v_1, v_2, \ldots, v_n \in V$ s.a. $S = \{v_1, \ldots, v_n\}$ er en basis for V.
Ellers kalles V for **uendeligdimensjonalt**.
I tillegg sier man at $\{0\}$ er endelig dimensjonalt.
Δ

Eksempler på endelig og uendelig dimensjonale rom.
$\mathbb{R}^n$, $\mathbb{P}_n$, M_{nm} er endelig dim.
$F(-\infty, +\infty)$, $C(-\infty, +\infty) = \{f \in F(-\infty, +\infty), f \text{ kontinuerlig}\}$ er uendelig dim.

Teorem 5.4.2
La V være et endelig dimensjonalt vektorrom og $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ en basis for vektorrommet.
a) Hvis en mengde har færre enn n vektorer, da genererer ikke mengden vektorrommet V.
b) Hvis en mengde har flere enn n vektorer, da er mengden lineært avhengig.
$\square$

Konsekvens av teorem 5.4.2.
Gitt vektorrommet V og $\{v_1, \ldots, v_n\}$ en basis for V.
Da har alle andre basiser av V samme antall vektorer, dvs. n.

Def. Antall elementer i en basis av et endeligdimensjonalt vektorrom kalles for **dimensjonen til vektorrommet.**

Eks.
$$\dim(\mathbb{R}^n) = n$$
$$\dim(\mathbb{P}_n) = n+1$$
$$\dim(M_{nm}) = nm$$
$$\square$$

Oppgave 5.4.13:

Finn en basis for mengden av løsninger til
$$3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$$
$$5x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0.$$

Løsningen kan generelt skrives

$x_1 = t$

$x_2 = s$ der t og s er parametre

$x_3 = -4t$

$x_4 = t - s$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = t\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_1} + s\underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}}_{v_2}$$

Siden disse to vektorene er lineært uavhengige i $\mathbb{R}^4$ (kan verifiseres) og de genererer alle løsninger av systemet $\Rightarrow \{v_1, v_2\}$ er en basis og dimensjonen av mengden av løsninger er 2.

Merk at Teorem 5.3.3 som sier:
" Gitt $S = \{v_1, \dots, v_r\}$ i $\mathbb{R}^n$, hvis $r > n$ er S lineært avh."
er en konsekvens av Teorem 5.4.2.

Teorem 5.4.4:

(Forteller hva som skjer når vi fra en mengde vektorer i V trekker fra eller setter inn en ekstra vektor)

Anta S er en ikke-tom, endelig mengde vektorer i et vektorrom V.

(a) Hvis S er lineært uavhengig og $v \in V$, men $v \notin \text{span}(S)$ da er $S \cup \{v\}$ lineært uavhengig.

(b) Hvis $v \in S$ og v kan skrives som en lineær komb. av de andre vektorene i S, da er mengden

$$S - \{v\} = \{u \in S \mid u \neq v\}$$

s.a. $\quad \text{span}(S) = \text{span}(S - \{v\})$

$\square$

Bevis

(a) Anta $S = \{v_1, \dots, v_r\}$ lin. uavh. og $v \in V$, $v \notin \text{span}(S)$

For å avgjøre om $S \cup \{v\}$ er lin. uavh. betrakt lineærkombinasjonen

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_r v_r + \lambda_{r+1} v = 0$$

Da må $\lambda_{r+1} = 0$, ellers kunne vi skrive v som en lineærkomb. av $v_1, \dots, v_r \Rightarrow v \in \mathrm{span}(S)$, men vi har antatt $v \notin \mathrm{span}(S)$, så da er

$$0 = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r + \lambda_{r+1} v = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_r v_r$$

$\Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r = 0$ siden $v_1, \dots, v_r$ er lin. uavh. og da er $v_1, v_2, \dots, v_r, v$ lin. uavh.

(b) $S = \{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ $\qquad v_r = \bar{\lambda}_1 v_1 + \dots + \bar{\lambda}_{r-1} v_{r-1} \quad (*)$

for alle $w \in \mathrm{span}(S) \Rightarrow w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{r-1} v_{r-1} + \lambda_r v_r$

fra $(*)$: $\quad w = \lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_{r-1} v_{r-1} + \lambda_r (\bar{\lambda}_1 v_1 + \dots + \bar{\lambda}_{r-1} v_{r-1})$

$\Rightarrow \quad w \in \mathrm{span}\{v_1, \dots, v_{r-1}\} = \mathrm{span}(S - \{v_r\})$

$\Rightarrow \quad \mathrm{span}(S) \subset \mathrm{span}(S - \{v_r\})$ og siden også

$\mathrm{span}(S - \{v_r\}) \subset \mathrm{span}(S)$

$\Rightarrow \quad \mathrm{span}(S) = \mathrm{span}(S - \{v_r\})$ $\qquad \square$

Konsekvenser av teorem 5.44.

1) Hvis V er s.a. $\dim(V) = n$ og S er en mengde med n vektorer da er: S en basis hvis og bare hvis enten $V = \mathrm{span}(S)$

eller S er lineært uavhengig.

<u>Bevis</u> • Anta at S har n vektorer og $V = \mathrm{span}(S)$

$\Rightarrow$ S er lin. uavhengig ellers vil for eks. en

av dem $v_n = \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_i v_i$ og da sier

Teorem 5.4.4 $\Rightarrow$ $\mathrm{span}(S - \{v_r\}) = V$, dette

er en selvmotsigelse med teorem 5.4.2 (b)

(som sier at færre en dim(V) vektorer ikke spenner ut V)

• Anta nå at S har n vektorer og at de er lin.

uavhengige $\Rightarrow$ $\mathrm{span}(S) = V$

ellers $\exists\, v \in V$, $v \notin \mathrm{span}(S)$ s.a. $S \cup \{v\}$ er

lin. uavh., men dette er en selvmotsigelse siden

$S \cup \{v\}$ har $n+1$ vektorer og av teorem 5.4.2(a)

(mer enn dim(V) vektorer er lin. avh.),

$S \cup \{v\}$ må da være lin. avh.

$\square$

2) Teorem 5.4.6

3) <u>Teorem 5.4.7</u>

Hvis W er et underrom av et endelig dimensjonalt

vektorrom V, da er $\dim(W) \leq \dim(V) = n$, og

hvis $\dim(W) = \dim(V)$ så er $W = V$.