24 & 27. jan. 2006

5.5 Rad, søyle og nullrom

Gitt en $m \times n$-matrise

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Vektorene

$$r_1 = [a_{11} \ \cdots \ a_{1n}] \qquad r_i \in \mathbb{R}^n$$
$$r_2 = [a_{21} \ \cdots \ a_{2n}]$$
$$\vdots$$
$$r_m = [a_{m1} \ \cdots \ a_{mn}]$$

kalles rad-vektorer

og

$$c_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad c_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \quad \ldots, \quad c_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix}$$

kalles søyle-vektorer

$$c_i \in \mathbb{R}^m$$

Eksempel:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 4 \end{bmatrix}$$

Rad-vektorer

$$r_1 = [2 \ \ 1 \ \ 0]$$
$$r_2 = [3 \ \ -1 \ \ 4]$$

søyle-vektorer

$$c_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \ c_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \ c_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Def. Gitt A, $m \times n$-matrise. Underrommet generert av rad-vektorene i A kalles for rad-rom, underrommet generert av søylevektorene kalles søylerom og

underrommet av alle løsninger til $Ax=0$
kalles for nullrommet til A.

$\square$

Vi skal se nærmere på sammenhengen mellom rad-rom, søylerom og null-rom av A og løsninger av systemet $Ax=b$.

Merk at gitt

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad x=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

$$Ax=\begin{bmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1 + \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{bmatrix} x_2 + \cdots + \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} x_n =$$

$$= c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n$$

Og da er $Ax=b \iff c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_nx_n=b$

Dette betyr at det fins løsninger av $Ax=b$

$\Updownarrow$

b er i søylerommet til A (Teorem 5.5.1)

Eksempel La $Ax=b$ være

$$\begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

Vis at b er i søylerommet til A, og skriv b som en linear komb. av søyle-vektorene.

Man finner først løsningen til systemet, som er:

$$x_1 = 2, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 3$$ (ved å bruke f.eks. Gaussel.)

Siden systemet er konsistent er b i søylerommet til A og da:

$$2\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} + 3\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -9 \\ -3 \end{bmatrix}$$

□

Vi skal nå se på et fundamentalt resultat av løsninger av $Ax=b$ relativt løsninger til $Ax=0$.

Teorem 5.2.2

Anta at x_0 er en løsning av $Ax=b$, et konsistent, lineært, ikke-homogent system. Anta at $v_1, v_2, \dots, v_k$ er en basis for nullrommet til $Ax=0$, da kan alle løsninger av $Ax=b$ skrives som

$$x = x_0 + c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_k v_k \qquad (*)$$

og motsatt; for alle valg av skalarene $c_1, c_2, \dots, c_k$, er vektoren x i $(*)$ en løsning av $Ax=b$ □

Bevis Anta at x_0 er en (bestemt) løsning av $Ax=b$ og $v_1, \dots, v_k$ en basis for underrommet av løsninger av $Ax=0$.

Hvis x da er en vilkårlig løsning av $Ax=b$ er

$$Ax_0 = b \quad \text{og} \quad Ax = b$$, subtraherer

$$A(x-x_0) = 0$$, dvs. $x-x_0$ er i nullrommet

til A, og $x - x_0 = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_k v_k$

$$x = x_0 + c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_k v_k$$

som beviser første del.

Motsatt, anta $x = x_0 + c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_k v_k$ (som i $*$)

Da er $Ax = Ax_0 + c_1 A v_1 + c_2 A v_2 + \dots + c_k A v_k$

siden $v_1, \dots, v_k$ er i nullrommet:

$$Ax = b + 0 + 0 + \dots + 0 = b$$, så

x er en løsning $\square$

I formel (*) sier vi at x_0 er en partikulær løsning av $Ax=b$ og at $x_0 + c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_k v_k$ er den generelle løsningen av $Ax=b$ og at $c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_k v_k$ er den generelle løsningen av $Ax=0$.

Eksempel: oppgave 5b (Generell løsning av $Ax=b$)

Finn vektorformen av den generelle løsningen til systemet $Ax=b$:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 5 \\ x_1 + \phantom{x_2 +{}} x_3 &= -2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 3 \end{aligned}$$

, og bruk dette til å finne den generelle løsningen av $Ax=0$ på vektorform.

Løsningen av $Ax=b$ er

$$\begin{aligned} x_1 &= -2-t \\ x_2 &= 7-t \qquad , t \in \mathbb{R} \\ x_3 &= t \end{aligned}$$

Vektorform: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$. $\begin{bmatrix} -2 \\ 7 \\ 0 \end{bmatrix}$ er da en partikulær løsning, og det kan verifiseres at $t\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ er en generell løsning til

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\ x_1 + x_3 &= 0 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

$\square$

Husk at de elementære radoperasjonene er:

- Multiplisere en rad med en konstant
- Bytte om to rader.
- Addere et multiplum av en rad til en annen.

Siden elementære rad-operasjoner ikke har noen effekt på løsningsmengden til $Ax=0$ så vil ikke elementære rad-operasjoner forandre nullrommet til A. (Teorem 5.3.3)

Teorem 5.5.4 Elementære rad-operasjoner endrer ikke rad-rommet til en matrise A. $\square$

Bevis Anta at $r_1, \dots, r_m$ er radene til A.

$\text{row}(A) = \text{span}\{r_1, \dots, r_m\}$. Anta $A \sim B$, og

$\text{row}(B) = \text{span}\{r_1', \dots, r_m'\}$

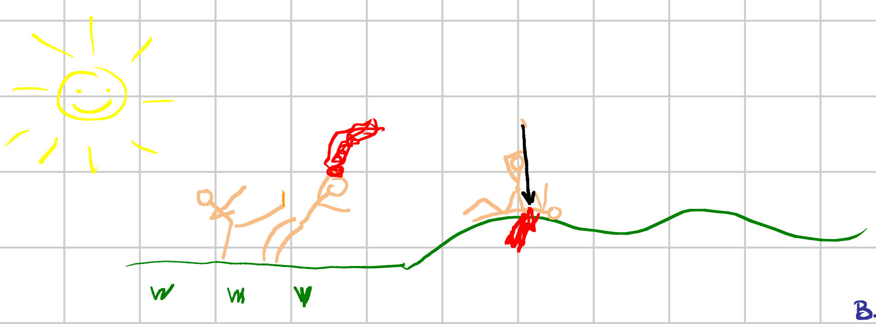
Vil da vise at $\overbrace{\text{row}(B) \subset \text{row}(A) \text{ og } \text{row}(A) \subset \text{row}(B)}^{\text{row}(A) = \text{row}(B)}$.

Hvis vi bytter om to rader vil de fortsatt spenne ut det samme rommet.

Hvis rad-operasjonen er multiplikasjon med en konstant, eller addisjon av et multiplum av en annen rad, er radene i B lineærkombinasjoner av radene i A, så $r_1', r_2', \dots, r_m' \in \text{row}(A)$. ← Lukket under addisjon og skalarmultiplikasjon, så alle lin. komb. av $r_1', \dots, r_m'$ ligger også i $\text{row}(A)$. Så hvis $a \in \text{row}(B) \Rightarrow a \in \text{row}(A)$.

For å vise $\text{row}(A) \subset \text{row}(B)$ observer at $B \sim A$. $\square$

Eksempel på ikkeelementære operasjoner:



B.E.

Eksempel: Elementære radoperasjoner endrer søyle-rommet til en matrise A.

La $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = B$

$$\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}\right\} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right\}$$

$$\#$$

$$\text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}\right\} = \text{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right\}$$

$\square$

Hjelpesetning: Gitt A og B rad-ekvivalente matriser, da har vi at

søyle-vektorene til A; $c_1, \dots, c_n$ er lineært uavhengige

$$\Updownarrow$$

Søylevektorene til B; $c_1', \dots, c_n'$ er lineært uavhengige.

Bevis: $Ax = 0$ betyr $c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n = 0$

$$\Updownarrow$$

$Bx = 0$ " $c_1'x_1 + c_2'x_2 + \dots + c_n'x_n = 0$

Og da $c_1, \dots, c_n$ er lin. uavh. $\Leftrightarrow$ $c_1', \dots, c_n'$ lin. uavh. $\square$

Teorem 5.5.5

Gitt A og B, rad-ekvivalente matriser.

a) En mengde søyle-vektorer til A er lineært uavhengige

$$\Updownarrow$$

de tilsvarende søyle-vektorene i B er lineært uavhengige.

b) En mengde søyle vektorer til A er en basis for søylerommet til A $\Leftrightarrow$ de tilsvarende søylevektorene i B er en basis for søylerommet til B.

For å finne basiser av rad-rom og søylerom til en matrise er det lettest å først "transformere" matrisa til trappeform, siden det er lett å finne disse rommene til trappematrisa.

Teorem 5.5.6

Gitt R på trappeform, rad-vektorer med ledende enere gir en basis for rad-rommet til R.

Søyle-vektorer med ledende enere i rad-vektoren, er en basis for søylerommet til R.

Eksempel:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

Finn basis for rad-rom og søylerom til A.

Trappeformen til A:

$$R = \begin{bmatrix} 1^* & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 1^* & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1^* & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Vi bruker teorem 5.5.6 og da er

$$r_1 = [1 \;\; -3 \;\; 4 \;\; -2 \;\; 5 \;\; 4]$$
$$r_2 = [0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 3 \;\; -2 \;\; -6]$$
$$r_3 = [0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 0 \;\; 1 \;\; 5]$$

en basis for radrommet til R, og dermed også for A.

En basis for søylerommet til R er

$$c_1' = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c_3' = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad c_5' = \begin{bmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix},$$ fra Teorem 5.5.6

Vi vet at søylerommet til $R \neq$ søylerommet til A, men Teorem 5.5.5b gir at

$$c_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad c_3 = \begin{bmatrix} 4 \\ 9 \\ 9 \\ -4 \end{bmatrix}, \quad c_5 = \begin{bmatrix} 5 \\ 8 \\ 9 \\ -5 \end{bmatrix}$$ er en basis for

søylerommet til A.

Oppgave 12 a (ligner eks. 9 i boka)

Gitt $\{ v_1 = (1,0,1,1), v_2 = (-3,3,7,1), v_3 = (-1,3,9,3), v_4 = (-5,3,5,-1) \}$

Finn en delmengde vektorer som er en basis for span $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

Skriv alle vektorer som ikke er i basisen som en lineærkombinasjon av vektorene i basisen.

Løsning: Vi skriver $A = [v_1 \; v_2 \; v_3 \; v_4]$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & -1 & -5 \\ 0 & 3 & 3 & 3 \\ 1 & 7 & 9 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

, og finner trappeformen

$$A \sim R = \begin{bmatrix} 1^* & -3 & -1 & -5 \\ 0 & 1^* & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Fra Teorem 5.5.6 vet vi at $w_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ og $w_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ er en basis for søylerommet til R, og fra Teorem 5.5.5 får vi at v_1 og v_2 er en basis for søylerommet til A, dvs. en basis for span$\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$.

Siden $w_3 = 2w_1 + w_2$, så er $v_3 = 2v_1 + v_2$

$w_4 = -2w_1 + w_2$, — " — $v_4 = -2v_1 + v_2$

$S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ $\qquad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \notin \text{span}(S)$

$S \cup \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ være l.uavh.

b) $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \right\}$ $\qquad \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\} = \text{span}(S)$

Frihånds eksempel....

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} -2 \\ \hookleftarrow \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} -1, -1 \\ \hookleftarrow \\ \hookleftarrow \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -2 \\ \hookleftarrow \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow \qquad\qquad\qquad \uparrow \quad \uparrow \quad \uparrow$$

basis for radrommet til A: $\overbrace{\{ [1\ 1\ 1], [2\ 3\ 4], [0\ 1\ 0] \}}^{\text{bestående av rader i } A}$