31. januar 2006

HØGSKOLEN I SØR-TRØNDELAG

5.6 Rang og nullitet

Fundamentale underrom forbundet med en matrise A.

rad-rom til A	rad-rom til A^T
søylerom til A	søylerom til A^T
nullrom til A	nullrom til A^T

Siden radene i A er søylene i A^T er rad-rommet til A det samme som søylerommet til A^T og rad-rommet til A^T er det samme som søylerommet til A.

* Dermed har vi 4 fundamentale underrom forbundet med A:

- rad-rom til A
- søylerom til A
- nullrom til A
- nullrom til A^T

I et tidligere eksempel så vi at matrisa

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 & -2 & 5 & 4 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 8 & 2 \\ 2 & -6 & 9 & -1 & 9 & 7 \\ -1 & 3 & -4 & 2 & -5 & -4 \end{bmatrix}$$

hadde et søylerom og et radrom, begge av dimensjon 3.
Dette skjer for alle matriser.

Teorem 5.6.1

Hvis A er en matrise, så har radrommet og søylerommet til A samme dimensjon. $\square$

HØGSKOLEN I SØR-TRØNDELAG

Bevis Anta at R er trappeformen til A. Siden "elementære radoperasjoner ikke forandrer radrommet til A" (Teorem 5.5.4)

$$\Rightarrow \qquad \dim(\text{radrom } A) = \dim(\text{radrom } R)$$

Fra Teorem 5.5.5b vet vi at

$$\dim(\text{søylerom } A) = \dim(\text{søylerom } R)$$

Vi må da vise at

$$\dim(\text{søylerom } R) = \dim(\text{radrom } R)$$

Vi bruker Teorem 5.5.6 som sier at en basis for radrom til R er alle rader med ledende 1'ere og en basis for søylerom til R er alle søyler med ledende 1'ere; siden

$$\#\text{ rader med ledende 1'ere} = \#\text{ søyler med ledende 1'ere}$$

er

$$\dim(\text{radrom } R) = \dim(\text{søylerom } R)$$

$\square$

Def. Felles dimensjon til radrommet til A og søylerommet til A kalles for rangen til A, rank(A). Dimensjonen til nullrommet til A kalles for nulliteten til A, nullity(A).

Δ

Eksempel på rang og nullitet til en 4×5-matrise

<u>Oppgave 2d</u> (kap. 5.6)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 & 9 \\ 3 & -2 & 1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & -1 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 8 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1^* & 4 & 5 & 6 & 9 \\ 0 & 1^* & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$$

trappeform

← Ledende 1'ere

← — " —

2 rader med ledende 1'ere $\Rightarrow \operatorname{rank}(A) = 2$.

Nullitet: Vi bruker trappeformen R siden vi vet at

$$\text{nullrom}(A) = \{ x \in \mathbb{R}^5 \mid Ax = 0 \} = \{ x \in \mathbb{R}^5 \mid Rx = 0 \} = \text{nullrom}(R)$$

Vi finner generell løsning av $Rx = 0$:

$$x_1 + 4x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 9x_5 = 0$$

$$x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 = 0$$

Så

$$x_1 = -(x_3 + 2x_4 + x_5)$$

$$x_2 = -(2x_5 + x_3 + x_4)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p-2q-r \\ -p-q-2r \\ p \\ q \\ r \end{pmatrix} = p \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_1} + q \underbrace{\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{v_2} + r \underbrace{\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{v_3}$$

der v_1, v_2, v_3 er lin. uavh.

$\Rightarrow \dim(\text{nullrom til } A) = 3$ <u>nullity$(A) = 3$</u>

∎

Teorem 5.6.2

Gitt $m \times n$-matrisen A, da er $\text{rank}(A) = \text{rank}(A^T)$ $\square$

Bevis $\text{rank}(A) = \dim(\text{radrom } A) = \dim(\text{søylerom } A)$

$$= \text{rank}(A^T) \quad \square$$

Viktig sammenheng mellom rang og nullitet til en matrise:

Teorem 5.6.3 DIMENSJONSTEOREMET FOR MATRISER.

Hvis A er en matrise med n søyler, da er

$$\text{rank}(A) + \text{nullity}(A) = n \quad \square$$

Bevis Siden A har n søyler har systemet $Ax = 0$ n ukjente (variable). Vi deler opp variablene i to grupper: ledende variabler og frie variabler. Ledende variable er de som svarer til de ledende 1'ere i trappeform av A, de andre er frie variable (se kap. 1.2)

Vi har da:

$$(\text{antall ledende variable}) + (\text{antall frie variable}) = n,$$

men $(\text{antall ledende variable}) = (\text{antall ledende 1'ere på trappeform})$

$= \text{rank}(A)$

$$\Rightarrow \quad \text{rank}(A) + (\text{antall frie variable}) = n$$

Må vise at (antall frie variable) = nullity(A).

Det er slik fordi: nullity(A) = dim(nullrommet til A)

= (antall parametre i den generelle løsn. til $Ax = 0$) ← se eks. over.

= (antall frie variable)

Dermed er $\text{rank}(A) + \text{nullity}(A) = n$ □

Teorem 5.6.4

Hvis A er en $m \times n$-matrise da er

a) $\text{rank}(A)$ = (antall ledende variable i løsningen til $Ax = 0$).

b) $\text{nullity}(A)$ = (antall parametre i den generelle løsn. til $Ax = 0$)

□

Eksempel: Oppgave 5.6.2d

A er en 4×5-matrise. $n = 5$.

Vi fant at $\text{rank}(A) = 2$ og $\text{nullity}(A) = 3$.

$$\text{rank}(A) + \text{nullity}(A) = 2 + 3 = 5$$

det stemmer! Hipp hipp...

□

Eksempel: Anta at A er en 5×7-matrise med $\text{rang}(A) = 3$.

Antall parametre i den generelle løsningen av $Ax = 0$ blir da:

$$\text{nullity}(A) = n - \text{rank}(A) = 7 - 3 = \underline{\underline{4}}$$

Maksimal verdi for rank (A), der A er $m \times n$-matrise:

Vi vet at

$$\begin{array}{c} \operatorname{rank}(A) = \dim(\underbrace{\text{radrom til } A}_{\text{underrom i } \mathbb{R}^n}) \leq n \\ \| \\ \operatorname{rank}(A^T) = \dim(\underbrace{\text{radrom til } A^T}_{\text{underrom i } \mathbb{R}^m}) \leq m \end{array}$$

$$\Rightarrow \operatorname{rank}(A) \leq \min\{m, n\}$$

Bruk av rang-begrepet for eksistens og entydighet av løsninger til $Ax=b$:

Rang av A kan brukes til å avgjøre

1) Om $Ax=b$ er konsistent (har minst en løsning)
2) Om $Ax=b$ er konsistent for en vilkårlig $b \in \mathbb{R}^m$
3) Om $Ax=0$ har bare den trivielle løsningen
4) Om $Ax=b$ ikke har mer enn en løsning.
5) Når $m=n$ om $Ax=b$ har 1 og bare 1 løsning.

1 til 5 er problemer relatert til rang og dimensjonsteoremet.

Konsistensteorem 5.6.5

Hvis $Ax=b$ er et lineært system av m ligninger og n ukjente, da er følgende utsagn ekvivalente:

a) $Ax=b$ er konsistent
b) $b \in$ Søylerommet til A
c) A og $[A \mid b]$ (utvidet matrise) har samme rang. $\square$

Bevis a) $\Leftrightarrow$ b) er bevist i Teorem 5.5.1

Må bevise at b) $\Leftrightarrow$ c)

søylene i A

$b \in$ søylerommet til $A \Leftrightarrow b \in \operatorname{span}\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$

$\Leftrightarrow \exists\ \lambda_1, \dots, \lambda_n$ koeffisienter s.a. $b = \lambda_1 c_1 + \dots + \lambda_n c_n$

$\Leftrightarrow \operatorname{span}\{c_1, \dots, c_n, b\} = \operatorname{span}\{c_1, \dots, c_n\}$

$\Leftrightarrow$ søylerom $[A \mid b]$ = søylerom A

$\Leftrightarrow \operatorname{rank}([A \mid b]) = \operatorname{rank}(A)$ $\square$

Eksempel oppg. 5.6.2d. La $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{bmatrix}$

$$[A \mid b] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 4 & 5 & 6 & 9 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 4 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -2 & -1 & 4 \\ 2 & 3 & 5 & 7 & 8 & 0 \end{array}\right] \sim \begin{bmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 & 9 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow \operatorname{rank}([A \mid b]) = 3$, mens vi tidligere har vist at $\operatorname{rank}(A) = 2$, da er $Ax = b$ ikke-konsistent.