7. feb. 2006

6.1 Indreprodukter

HØGSKOLEN I SØR-TRØNDELAG

Definisjon av indreprodukt mellom to vektorer i $\mathbb{R}^n$ kan generaliseres til vilkårlige vektorrom.

Def. Et indreprodukt på et reelt vektorrom V er en funksjon som til hvert par av vektorer u og v assosierer et reelt tall $\langle u, v\rangle$ og er s.a.

1) $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle$ — symmetri aksiom
2) $\langle u+v, w\rangle = \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$ — additivitet
3) $\langle ku, v\rangle = k\langle u, v\rangle$ — homogenitet
4) $\langle u, u\rangle \geq 0$ — positivitet
og $\langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0$

Δ

Vi ser nå på indreprodukt på reelle vektorrom (som vi kaller 'reelle indreprodukt rom'). Indreprodukt på komplekse vektorrom defineres senere.

Eksempel: Euklidsk indreprodukt

$$u = (u_1, u_2, \ldots, u_n) \quad , \quad v = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$$

$$\langle u, v\rangle = u^T v = u \cdot v = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots + u_n v_n$$

$u^T = [u_1 \; u_2 \; \dots \; u_n]$ $\quad$ $1 \times n$

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \quad n \times 1$$

HØGSKOLEN
I SØR-TRØNDELAG

Eksempel: Vektet indreprodukt

Anta $w_1, w_2, \dots, w_n$ positive reelle tall, da er

$$\langle u, v\rangle := u_1 v_1 w_1 + u_2 v_2 w_2 + \dots + u_n v_n w_n$$

et indreprodukt.

F. eks. i $\mathbb{R}^2$:

$$\langle u, v\rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$$

verifiser at indreproduktaksiomene er oppfylt.

Bevis:

1) $\langle u, v\rangle = 3u_1v_1 + 2u_2v_2 = 3v_1u_1 + 2v_2u_2 = \langle v, u\rangle$

2) $\langle u+v, w\rangle = 3(u_1+v_1)w_1 + 2(u_2+v_2)w_2$

$$= 3u_1w_1 + 3v_1w_1 + 2u_2w_2 + 2v_2w_2$$

$$= \langle u, w\rangle + \langle v, w\rangle$$

3) $\langle k\cdot u, v\rangle = 3(ku_1)v_1 + 2(ku_2)v_2 = k(3u_1v_1 + 2u_2v_2)$

$$= k\langle u, v\rangle$$

4) $\langle u, u\rangle = 3u_1^2 + 2u_2^2 \geq 0$

$$\langle u, u\rangle = 0 \Leftrightarrow 3u_1^2 + 2u_2^2 = 0 \Leftrightarrow u_1 = u_2 = 0$$

Bruk av indreprodukt til å definere lengden av en vektor (norm av en vektor) og avstand mellom to vektorer:

Def Gitt V et vektorrom med et indreprodukt $\langle \cdot , \cdot \rangle$

normen (**eller lengden**) av en vektor u er

$$\|u\| = \langle u, u \rangle^{1/2}$$

avstand mellom to vektorer u og v er

$$d(u,v) = \|u - v\|$$

Eksempel:

Disse begrepene er kjent i $\mathbb{R}^n$.

$$\|u\| = \sqrt{u^T u} = \sqrt{u \cdot u} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_n^2}$$

$$d(u,v) = \sqrt{(u-v)^T (u-v)} = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + \dots + (u_n - v_n)^2}$$

$\square$

Eksempel med vektet indreprodukt i $\mathbb{R}^2$.

Gitt $u = (1, 0)$, $v = (0, 1)$ i $\mathbb{R}^2$

Euklidsk norm: $\|u\|_E = \sqrt{1^2 + 0^2} = 1$

$$d_E(u,v) = \sqrt{(1-0)^2 + (0-1)^2} = \sqrt{2}.$$

Vi lar $\langle u, v \rangle_{vekt} = 3u_1 v_1 + 2u_2 v_2$

$$\|u\|_{vekt} = \sqrt{3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 0^2} = \sqrt{3}$$

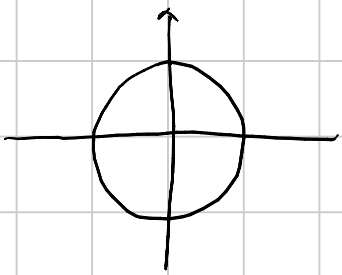
$$d(u,v)_{vekt} = \sqrt{3(1-0)^2 + 2(0-1)^2} = \sqrt{5}$$

$\square$

Enhetskule i et vektorrom V, med indreprodukt $\langle \cdot , \cdot \rangle$ er gitt av alle vektorer u i V, slik at $\|u\| = 1$

Eksempel: "Enhetssirkel" i $\mathbb{R}^2$ med forskjellige normer.

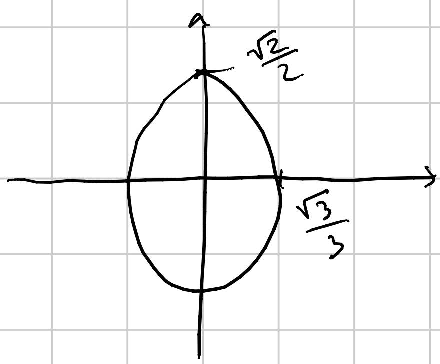
Enhetssirkel i $\mathbb{R}^2$ med Euklidsk indreprodukt,



$u = (x, y)$ $\quad \|u\| = 1 \iff x^2 + y^2 = 1$

Bruker så et vektet indreprodukt $\quad \|u\|_{vekt} = 1$

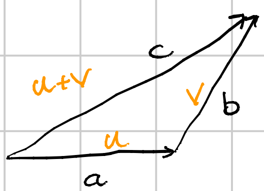
$\iff 3x^2 + 2y^2 = 1$ $\quad$ Ligningen til en ellipse:



$\frac{\sqrt{3}}{3} \approx 0{,}5$ $\quad \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}7$

Effekten av å forandre indreproduktet i $\mathbb{R}^n$ er den å deformere enhetskuler.

De viktigste prinsippene fra Euklidsk geometri gjelder fremdeles: For eksempel i $\mathbb{R}^2$: for triangel



$c \leq a + b$

$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ gjelder for alle indreproduktrom (bevises senere)

Mer generelle indreprodukt: Indre produkt indusert av en matrise.

A inverterbar:

$$\langle u,v\rangle = (Au)^T(Av) = u^TA^TAv$$

hvis $A = I$ (identitetsmatrisa) fåes

$$\langle u,v\rangle = u^Tv \qquad \text{(Euklidsk indreprodukt)}$$

La $A = \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \Rightarrow \langle u,v\rangle = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{3} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = 3u_1v_1 + 2u_2v_2$$

I $\mathbb{R}^n$: vektet indreprodukt $\langle u,v\rangle_{vekt} = u_1v_1w_1 + \dots + u_nv_nw_n$

er indreproduktet indusert av $A = \mathrm{diag}(\sqrt{w_1}, \sqrt{w_2}, \dots, \sqrt{w_n})$

Eksempler: Indreprodukt i M_{22}

$U = \begin{bmatrix} U_{11} & U_{12} \\ U_{21} & U_{22} \end{bmatrix}$ $\quad V = \begin{bmatrix} V_{11} & V_{12} \\ V_{21} & V_{22} \end{bmatrix}$ det kan (dere) verifiseres at

$\langle U,V\rangle = \mathrm{tr}(U^TV) = U_{11}V_{11} + U_{21}V_{21} + U_{12}V_{12} + U_{22}V_{22}$ er et indreprodukt

$$\|U\| = \sqrt{U_{11}^2 + U_{21}^2 + U_{12}^2 + U_{22}^2}$$

$\square$

Indreprodukt i $\mathbb{P}_2$

$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 \qquad q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2$

$\langle p, q\rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 \qquad \|p\| = \langle p,p\rangle^{1/2}$

$= \sqrt{a_0^2 + a_1^2 + a_2^2}$

kan verifiseres at dette er et indreprodukt.

II

Indreprodukt på $C[a,b]$, kontinuerlige funksjoner på $[a,b]$

$f(x), g(x) \in C[a,b] \qquad \langle f,g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$ er et indreprodukt.

Vi verifiserer aksiomene:

1) $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,dx = \int_a^b g(x)f(x)\,dx = \langle g,f\rangle$

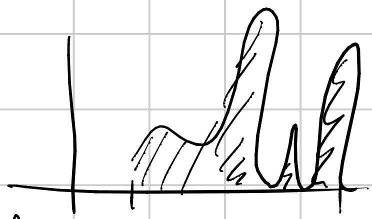
2) $\langle f+g, h\rangle = \int_a^b (f(x)+g(x))h(x)\,dx = \int_a^b f(x)h(x)\,dx + \int_a^b g(x)h(x)\,dx$

$= \langle f,h\rangle + \langle g,h\rangle$

3) $\langle kf, g\rangle = \int_a^b kf(x)g(x)\,dx = k\int_a^b f(x)g(x)\,dx = k\langle f,g\rangle$

4) $f \in C[a,b] \Rightarrow f^2(x) \geq 0 \quad \forall\, x \in [a,b]$

$\langle f,f\rangle = \int_a^b f^2(x)\,dx \geq 0$



f^2 kontinuerlig, $f^2 \geq 0$, $\langle f,f\rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$

$$\|f\| = \langle f, f \rangle^{1/2} = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}$$

Teorem 6.1.1: Egenskaper til indreprodukt

Gitt $u, v, w \in V$ et vektorrom med reelt indreprodukt $\langle \cdot , \cdot \rangle$, k er en skalar.

a) $\langle 0, v \rangle = \langle v, 0 \rangle = 0$

b) $\langle u, v+w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$

c) $\langle u, kv \rangle = k \langle u, v \rangle$

d) $\langle u-v, w \rangle = \langle u, w \rangle - \langle v, w \rangle$

e) $\langle u, v-w \rangle = \langle u, v \rangle - \langle u, w \rangle$