6.2 Vinkel i indreprodukt, ortogonalitet

Teorem 6.2.1: Cauchy-Schwarz ulikhet

Gitt u, v i et reelt vektorrom V med indreprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$, da

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\| \qquad (*)$$

$\square$

Egenskaper ved norm

Hvis $u, v \in V$ med $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indreprodukt, og k en skalar

a) $\|u\| \geq 0$ (aksiom 4 for i.p.)

b) $\|u\| = 0 \Leftrightarrow u = 0$ (aksiom 4)

c) $\|ku\| = |k|\,\|u\|$ (aksiom 3)

d) $\|u+v\| \leq \|u\| + \|v\|$ Trekantulikheten

$$
\begin{aligned}
\|u+v\|^2 &= \langle u+v, u+v\rangle = \langle u, u+v\rangle + \langle v, u+v\rangle \\
&= \langle u, u\rangle + \langle u, v\rangle + \langle v, u\rangle + \langle v, v\rangle \\
&= \langle u, u\rangle + 2\langle u, v\rangle + \langle v, v\rangle \\
&\leq \|u\|^2 + \|v\|^2 + 2|\langle u, v\rangle| \\
&\leq \|u\|^2 + 2\|u\|\,\|v\| + \|v\|^2 \\
&= (\|u\| + \|v\|)^2
\end{aligned}
$$

Egenskaper ved distanse (avstand)

Hvis u, v, w er vektorer i et vektorrom V,
med $\langle \cdot , \cdot \rangle$ indreprodukt, k skalar.

a) $d(u,v) \geq 0$

b) $d(u,v) = 0 \iff u = v$

c) $d(u,v) = d(v,u)$

d) $d(u,v) \leq d(u,w) + d(w,v)$ Triangel/trekantulikheten.

$$d(u,v) = \|u - v\| = \|(u - w) + (w - v)\|$$
$$\leq \|u - w\| + \|w - v\| = d(u,w) + d(w,v) \qquad \square$$

Vinkel mellom to vektorer

I $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^3$ (og i V) har vi at $u^T v = u \cdot v = \|u\| \, \|v\| \cdot \cos\theta$

I flere dimensjoner (dvs. $\mathbb{R}^n$) kan man generalisere begrepet av vinkel mellom u og v på følgende måte

Anta $u \neq 0$, $v \neq 0$

Merk: $\langle u,v\rangle^2 \leq \|u\|^2 \|v\|^2$ C-S-ulikhet.

$$\left(\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\| \, \|v\|} \right)^2 \leq 1$$

$$-1 \leq \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\| \, \|v\|} \leq 1$$

$\cos\theta$ for $\theta \in [0, \pi]$ antar alle verdier mellom -1 og 1, vi kan da sette:

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\,\|v\|}}$$ og vi kaller θ vinkelen mellom u og v i V.

Eksempler i $\mathbb{R}^4$:

$$u = \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \langle u,v\rangle = 0 \qquad \cos\theta = \frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\,\|v\|} = 0 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$$

$$u = \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix}0\\2\\0\\0\end{pmatrix} \qquad \langle u,v\rangle = 2 \qquad \cos\theta = \frac{2}{1\cdot 2} = 1 \Rightarrow \theta = 0$$

$$\|u\| = \langle u,u\rangle^{1/2} = \sqrt{0^2+1^2+0^2+0^2} = 1\,, \quad \|v\| = \sqrt{2^2} = 2$$ eh....

$$u = \begin{pmatrix}1\\1\\0\\0\end{pmatrix} \quad v = \begin{pmatrix}1\\0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad \langle u,v\rangle = 1 \qquad \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\|u\| = \sqrt{2}$$

$$\|v\| = \sqrt{2}$$

$(60°)$

Def.: To vektorer er ortogonale hvis og bare hvis $\langle u,v\rangle = 0$.

Merk: Ortogonalitet avhenger av det valgte indreproduktet. To vektorer kan være ortogonale med hensyn på et indreprodukt og ikke et annet.

(Eks. $u = (1,1)$, $v = (1,-1)$, $u^T v = 1-1 = 0$
$\langle u,v\rangle_{\text{vekt}} = 3-2 = 1$)

Eksempel i M_{22}

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \langle U, V \rangle = 1\cdot 0 + 0\cdot 2 + 1\cdot 0 + 1\cdot 0 = \underline{\underline{0}}$$

så U og V er ortogonale i M_{22} med det definerte indreproduktet.

Eksempel $\mathbb{P}_2$

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} p(x)\, q(x)\, dx .$$

Vi har $p(x) = x$, $q(x) = x^2$

$$\|p\| = \langle p, p \rangle^{1/2} = \left(\int_{-1}^{1} x^2\, dx \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{3}}$$

$$\|q\| = \langle q, q \rangle^{1/2} = \left(\int_{-1}^{1} x^4\, dx \right)^{1/2} = \sqrt{\frac{2}{5}}$$

$$\langle p, q \rangle = \int_{-1}^{1} x \cdot x^2\, dx = \int_{-1}^{1} x^3\, dx = 0$$

Teorem 6.2.4: Generalisert Pytagoras teorem.

Gitt u og v s.a. $\langle u, v \rangle = 0$ da er

$$\|u + v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2$$

Bevis: $\|u+v\|^2 = \langle u+v, u+v \rangle = \langle u, u \rangle + 2\underbrace{\langle u, v \rangle}_{0} + \langle v, v \rangle = \|u\|^2 + \|v\|^2$

$\square$

Eksempel: Verifiser pytagoras teoren i $\mathbb{P}_2$ med $p(x)=x$ og $q(x)=x^2$.

$$\|p\|^2 + \|q\|^2 = \left(\sqrt{\tfrac{2}{3}}\right)^2 + \left(\sqrt{\tfrac{2}{5}}\right)^2 = \frac{2}{3} + \frac{2}{5}$$

$$\|p+q\|^2 = \langle p+q, p+q\rangle = \int_{-1}^{1} (x+x^2)(x+x^2)\,dx$$

$$= \int_{-1}^{1} x^2\,dx + \underbrace{2\int_{-1}^{1} x^3\,dx}_{0} + \int_{-1}^{1} x^4\,dx = \frac{2}{3} + \frac{2}{5}$$

Like! Hurra.

Ortogonalt komplement

Def. Gitt W et underrom av vektorrommet V, der indreproduktet $\langle \cdot , \cdot \rangle$ er definert. En vektor $u \in V$ hvis $\langle u, w\rangle = 0 \quad \forall\ w \in W$.

Mengden $W^{\perp} = \{ x \in V \mid \langle x, w\rangle = 0 \ \forall \ w \in W\}$

Δ kalles det *ortogonale komplementet av W.*

Teorem 6.2.5: Egenskaper til $W^{\perp}$

W underrom av V, vektorrom med $\langle \cdot , \cdot \rangle$

a) $W^{\perp}$ underrom av V

b) $W^{\perp} \cap W = \{0\}$

c) $(W^{\perp})^{\perp} = W$

Bevis a) Må vise at $W^\perp$ er lukket under "+" og "·".

For "+": $u_1, u_2 \in W^\perp$

$$\langle u_1 + u_2, w\rangle = \underbrace{\langle u_1, w\rangle}_{0} + \underbrace{\langle u_2, w\rangle}_{0} = 0 + 0 = 0 \quad \forall w \in W$$

$$\Rightarrow \quad u_1 + u_2 \in W^\perp$$

"·" på samme måte

b) - —

c) bevises senere

$\square$

Teorem 6.2.6 A $m \times n$ - matrise

a) $W = \text{radrom } A \iff \text{nullrom } A = W^\perp$ i $\mathbb{R}^n$

b) $U = \text{søylerom } A \iff \text{nullrom } A^T = U^\perp$ i $\mathbb{R}^m$

Bevis a) $(\Rightarrow)$ Anta $W = \text{radrom } A$, dvs. $W = \text{span}\{r_1, r_2, \dots, r_m\}$

Da er $W^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x^T(\lambda_1 r_1 + \dots + \lambda_m r_m) = 0$

for alle $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$

Da er $x \in W^\perp \iff$

$$\begin{array}{lcl} r_1^T x = 0 & & \\ r_2^T x = 0 & \iff & Ax = 0 \\ \vdots & & \Updownarrow \\ r_m^T x = 0 & & x \text{ er i nullromet til } A \end{array}$$

$W^\perp = \text{nullrom } A$ (da har vi bevist at

$W = \text{radrom } A \Rightarrow W^\perp = \text{nullrom } A$)