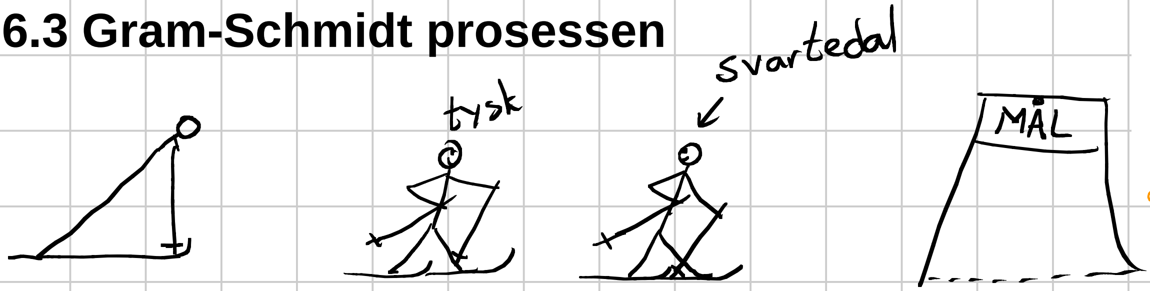
6.3 Gram-Schmidt prosessen



I $\mathbb{R}^3$ gitt et plan gjennom origo, kan hver vektor i $\mathbb{R}^3$ skrives som en sum av en vektor i planet og en vektor ortogonalt på planet. Dette gjelder generelt

Teorem 6.3.4 Projeksjonsteorem

Hvis W er et underrom av V (vektorrom med $\langle \cdot , \cdot \rangle$), da kan vi skrive hver vektor $u \in V$ på en unik måte som

$$u = w_1 + w_2 ,$$

der $w_1 \in W$ og $w_2 \in W^{\perp}$

w_1 kalles for "ortogonal projeksjon av u på W"

$$w_1 = \text{proj}_W (u)$$

w_2 kalles for "komponenten av u ortogonal på W"

$$w_2 = \text{proj}_{W^\perp} (u)$$

Og da

$$u = \text{proj}_W (u) + \text{proj}_{W^\perp} (u)$$

$\square$

Formler for å beregne ortogonal projeksjon (6.3.5)

Gitt W (endeligdimensjonalt) underrom av indreproduktrom V.

a) $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ ortonormal basis for W.

$u \in V$. $\quad \text{proj}_W(u) = \langle u, v_1 \rangle v_1 + \langle u, v_2 \rangle v_2 + \dots + \langle u, v_r \rangle v_r$

b) $\{v_1, v_2, \dots, v_r\}$ ortogonal basis for W, $u \in V$

$$\text{proj}_W(u) = \frac{\langle u, v_1 \rangle}{\|v_1\|^2} v_1 + \frac{\langle u, v_2 \rangle}{\|v_2\|^2} v_2 + \dots + \frac{\langle u, v_r \rangle}{\|v_r\|^2} v_r$$

$\square$

Eks. i $\mathbb{R}^3$: $W = \text{span}\{\underbrace{(0,1,0)}_{v_1}, \underbrace{(-\tfrac{4}{5}, 0, \tfrac{3}{5})}_{v_2}\}$, $v_1^T v_2 = 0$

Gitt $\quad u = (1,1,1) \in \mathbb{R}^3$, $u \notin W$

Finn $\quad \text{proj}_W(u) = \langle u, v_1 \rangle v_1 + \langle u, v_2 \rangle v_2$

$$= 1 \cdot (0,1,0) + (-\tfrac{1}{5}) \cdot (-\tfrac{4}{5}, 0, \tfrac{3}{5})$$

$$= \underline{\underline{(\tfrac{4}{25}, 1, -\tfrac{3}{25})}}$$

$\square$

Gram-Schmidt algoritme

Alle endeligdimensjonale indreproduktrom forskjellig fra nullvektorrommet har en ortonormal basis (Teorem 6.3.6)

___ kan konstruere en slik ortonormal basis ved bruk av Gram-Schmidt algoritmen.

Gitt V indreproduktrom med basis $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$.
Vi skal finne $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ ortogonal basis og etterpå ta $\left\{\frac{v_1}{\|v_1\|}, \frac{v_2}{\|v_2\|}, \ldots, \frac{v_n}{\|v_n\|}\right\}$ som ortonormal basis.

Algoritme

1. $v_1 = u_1$

2. $v_2 = \text{proj}_{W_1^\perp}(u_2) = u_2 - \text{proj}_{W_1}(u_2)$, der $W_1 = \text{span}\{v_1\}$

Husk at for en ortogonal basis $w_1, \ldots, w_r$ og $U = \text{span}\{w_1, \ldots, w_r\}$ så er

$$\text{proj}_U(v) = \frac{\langle v, w_1\rangle}{\|w_1\|^2} w_1 + \frac{\langle v, w_2\rangle}{\|w_2\|^2} w_2 + \cdots + \frac{\langle v, w_r\rangle}{\|w_r\|^2} w_r$$

Teor. (6.3.5)

I vårt tilfelle: $\text{proj}_{W_1}(u_2) = \frac{\langle u_2, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1$ og da...

$$v_2 = u_2 - \frac{\langle u_2, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1$$

(etter foresesn.)

Merk at $v_2 \neq 0$, ellers hadde u_1 og u_2 vært lineært avhengige:

$$v_2 = 0 \Leftrightarrow u_2 = \frac{\langle u_2, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 \underset{\substack{\uparrow \\ v_1 = u_1}}{=} \frac{\langle u_2, v_1\rangle}{\|u_1\|^2} u_1 = k \cdot u_1$$

3. $v_3 = \text{proj}_{W_2^\perp}(u_3) = u_3 - \text{proj}_{W_2}(u_3)$, $W_2 = \text{span}\{v_1, v_2\}$

$$= u_3 - \frac{\langle u_3, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \frac{\langle u_3, v_2\rangle}{\|v_2\|^2} v_2$$

Ved tilsvarende argument som over, $v_3 \neq 0$.

4. Fortsetter på samme vis, og etter n skritt har man $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, en ortogonal basis. $\square$

Oppg. 6.3.17 a)

$\mathbb{R}^3$ med Euklidsk indreprodukt. Bruk Gram-Schmidt algoritmen for å transformere $\{u_1, u_2, u_3\}$ til en ortonormal basis:

$$u_1 = (1,1,1), \quad u_2 = (-1,1,0), \quad u_3 = (1,2,1)$$

① $v_1 = u_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ $\qquad \|v_1\|^2 = 3$

② $v_2 = u_2 - \dfrac{\langle u_2, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} \cdot v_1 = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} - \dfrac{0}{3} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$

$\|v_2\|^2 = 2$

③ $v_3 = u_3 - \dfrac{\langle u_3, v_1\rangle}{\|v_1\|^2} v_1 - \dfrac{\langle u_3, v_2\rangle}{\|v_2\|^2} v_2$

$$= \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix} - \frac{4}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1/6\\1/6\\-1/3\end{pmatrix} \qquad \|v_3\|^2 = 1/6$$

Ortonormal basis: $\dfrac{v_1}{\|v_1\|} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $\dfrac{v_2}{\|v_2\|} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$, $\dfrac{v_3}{\|v_3\|} = \sqrt{6}\begin{pmatrix}1/6\\1/6\\-1/3\end{pmatrix}$ $\square$

Merk: Etter Gram-Schmidt prosessen har vi

$$q_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}, \ldots, q_n = \frac{v_n}{\|v_n\|},$$

da er $q_1, \ldots, q_n$ en ortonormal basis slik at

- $\{q_1, \ldots, q_k\}$ er en ortonormal basis for span$\{u_1, \ldots, u_k\}$
- q_k er ortogonal span$\{u_1, u_2, \ldots, u_{k-1}\}$

QR-faktorisering til en matrise

Teorem 6.37

Gitt A $m\times n$-matrise med lineært uavhengige kolonner, da

$$A = QR$$

der Q er en $m\times n$-matrise med ortonormale kolonner og R er en øvretriangulær $n\times n$-matrise og $\det(R) \neq 0$.

Bevis

$$A = [a_1 \; a_2 \; \ldots \; a_n]$$

$$Q = [q_1 \; q_2 \; \ldots \; q_n]$$

Q og R genereres ved bruk av Gram-Schmidt på $a_1, \ldots, a_n$

(Se boka for resten av beviset)

$$R = \begin{bmatrix} \langle a_1, q_1\rangle & \langle a_2, q_1\rangle & \cdots & \langle a_n, q_1\rangle \\ 0 & \langle a_2, q_2\rangle & \cdots & \langle a_n, q_2\rangle \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots\ 0 & \cdots & \langle a_n, q_n\rangle \end{bmatrix}$$

$\langle a_1, q_2\rangle$

Oppgave 6.3.24 b) Finn QR-faktoriseringen til $A = \begin{array}{c} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \\ \;\; a_1 \;\; a_2 \end{array}$

$\tilde{q}_1 = a_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \ \|\tilde{q}_1\| = \sqrt{2}$ $\qquad r_{11} = \langle a_1, q_1\rangle = 1/\sqrt{2} + 1/\sqrt{2} = \sqrt{2}$

$$\tilde{q}_2 = a_2 - \frac{\langle a_2, \tilde{q}_1\rangle}{\|\tilde{q}_1\|^2}\tilde{q}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{6}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\|\tilde{q}_2\| = \sqrt{3}$

$$q_1 = \frac{\tilde{q}_1}{\|\tilde{q}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad q_2 = \frac{\tilde{q}_2}{\|\tilde{q}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} \langle a_1, q_1\rangle & \langle a_2, q_1\rangle \\ 0 & \langle a_2, q_2\rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 6/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix}$$

sjekk: $$QR = \underline{\begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ 0 & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{bmatrix}}\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 6/\sqrt{2} \\ 0 & \sqrt{3} \end{bmatrix} = \underline{\underline{\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}}} = A$$