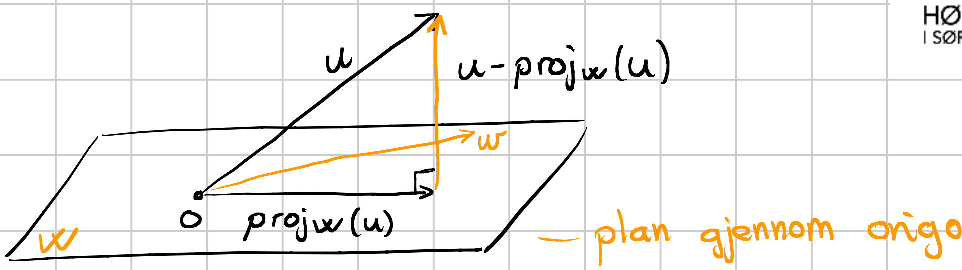
6.4 Beste approksimasjon

I $\mathbb{R}^3$,



$\text{proj}_W(u)$ er elementet i underrommet W s.a.

$$d(u, \text{proj}_W(u)) = \|u - \text{proj}_W(u)\| \leq \|u - v\| \qquad \forall\, v \in W$$

Generelt:

Teorem 6.4.1: Beste approksimasjonsteorem.

Hvis W er et endeligdimensjonalt underrom av et indreproduktrom V og $u \in V$, da er $\text{proj}_W(u)$ den beste approksimasjonen til u i W, dvs.

$$\|u - \text{proj}_W(u)\| < \|u - v\| \quad \text{for alle } v \in W,\ v \neq \text{proj}_W(u)$$

Bevis

$$u - v = u - \text{proj}_W(u) + \text{proj}_W(u) - v \qquad , v \in W$$

$\text{proj}_W(u) \in W$ og $v \in W \Rightarrow \text{proj}_W(u) - v \in W$,

mens $u - \text{proj}_W(u) \in W^\perp$, dvs. $u - \text{proj}_W(u) \perp W$.

Pytagoras teorem gir da $\left(\|u+v\|^2 = \|u\|^2 + \|v\|^2 \text{ hvis } u \perp v \right)$

$$\|u - v\|^2 = \|u - \text{proj}_W(u)\|^2 + \underbrace{\|\text{proj}_W(u) - v\|^2}_{>0 \text{ siden } v \neq \text{proj}_W(u)}$$

$$\Rightarrow \|u - v\|^2 > \|u - \text{proj}_W(u)\|^2$$

$$\|u - v\| > \|u - \text{proj}_W(u)\| \qquad \square$$

Dette kan bl.a. brukes til å løse følgende type problem

* Forholdet mellom størrelse og alder av trærne i en skog. Måler: 1. Alder: årringer
2. Størrelse: Diameter ved brysthøyde

Ønsker å finne en funksjon som beskriver forholdet mellom alder x og DBH y. Kan sette opp x-y-plot ved bruk av målingene $x_1, \dots, x_n$; $y_1, \dots, y_n$

Vi gjør en forenklende antakelse: Vi vil finne en linje som best approksimerer dataene våre.

Dette betyr at vi kan sette opp ligninger:

$$\begin{aligned} a + bx_1 &= y_1 \\ a + bx_2 &= y_2 \\ &\vdots \\ a + bx_n &= y_n \end{aligned} \iff Az = y, \text{ der } A = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}, z = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Systemet $Az = y$ er ikke konsistent, dvs. det fins ingen løsninger. Vi leter da etter en vektor z s.a.

$$\|Az - y\| \leq \|Av - y\| \quad \forall \; v \in \mathbb{R}^2,$$

dvs. $\|Az - y\|$ er minst mulig, $\|\cdot\|$ er Euklidsk norm.

* Vi kunne også antatt at funksjonen er et polynom av høyere grad i stedenfor en linje; for eksempel:

grad 2: $a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 = y_1$ grad 4: $a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + a_3 x_1^3 + \dots$

$\vdots$ eller

$a_0 + a_1 x_m + a_2 x_m^2 = y_m$

ukjente: $z = (a_0, a_1, a_2)$

Uansett er $Az = y$ ikke konsistent og vi leter etter z s.a.

$$\|Az - y\| \leq \|Av - y\| \quad \forall\, v \in \mathbb{R}^n, \; n = \text{grad av poly.} + 1$$

* z kalles minste kvadraters løsning av $Az = y$.

For å finne z ser vi på beste approksimasjonsteoremet.

La $w = Av$, der $v \in \mathbb{R}^n \Rightarrow w \in W$ = søylerom til A

$u = Az$, der $z \in \mathbb{R}^n$ minste kvadraters løsning

$\Rightarrow u \in W$

$\|u - y\| \leq \|w - y\| \quad \forall\, w \in W$, dette betyr

at $u = \text{proj}_W(y)$ og da $Az = \text{proj}_W(y)$ (Teor. 6.4.2)

I tillegg: $y - \text{proj}_W(y) = y - Az \in W^\perp$ (Hva er $W^\perp$?)

Husk at: Hvis U = nullrom til A^T og W = søylerom til A

(Teorem 6.2.6) da er $U = W^\perp$

mao. $W^\perp$ er nullrommet til A^T og dermed er

$$A^T(y - Az) = 0$$

dvs. $A^T A z = A^T y$ (Teorem 6.4.2)

dette betyr at minste kvadraters løsning er $z \in \mathbb{R}^n$ s.a.

$$\boxed{A^T A z = A^T y}$$ normallignningene

$A^T A$ er $n \times n$

Nå har vi et konsistent system som kan ha en eller uendelig mange løsninger.

Eksempel: oppg. 9.3.1 s.473

Finn minste kvadraters linje som tilpasser dataene

$$\overset{x_1\ y_1}{(0,0)},\quad \overset{x_2\ y_2}{(1,2)},\quad \overset{x_3\ y_3}{(2,7)}$$

$$\begin{aligned} a + b\cdot 0 &= 0 \\ a + b\cdot 1 &= 2 \\ a + b\cdot 2 &= 7 \end{aligned} \iff Az = y \text{, der } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix},\ z = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

Vi må løse normalligningene:

$$A^T A z = A^T y$$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$$A^T y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 16 \end{pmatrix}$$

Normalligningssystemet er $\begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 16 \end{pmatrix} \Rightarrow a = -\frac{1}{2},\ b = \frac{7}{2}$

Da har linja vi leter etter ligning

$$-\frac{1}{2} + \frac{7}{2}x = y$$

Teorem 6.4.3

A er en $m \times n$-matrise.

A har lin. uavh. søyler $\Leftrightarrow$ $A^T A$ er inverterbar $\square$

Bevis $(\Rightarrow)$: $A = [a_1 \ \dots \ a_n]$ lin. uavh. søyler $\Rightarrow A = QR$,

der $Q^T Q = I_n$, og $\det(R) \neq 0$

$\Rightarrow A^T A = (QR)^T QR = R^T Q^T QR = R^T R$

$\det(A^T A) = \det(R^T R) = \det(R^T) \cdot \det(R) = \det(R)^2 \neq 0$

$\Rightarrow A^T A$ er inverterbar.

$(\Leftarrow)$ $A^T A$ inverterbar $\Leftrightarrow (A^T A x = 0 \Leftrightarrow x = 0)$

Bevis ved selvmotsigelse:

Anta $\exists \tilde{x} : A\tilde{x} = 0$, $\tilde{x} \neq 0$

$\Rightarrow A^T A \tilde{x} = 0 \Rightarrow A^T A$ ikke inverterbar $\lightning$ $\square$

Eksempel: Oppg. 6.4.4a

Gitt $u = (2 \quad 1 \quad 3)$

$v_1 = (1 \quad 1 \quad 0) \qquad v_2 = (1 \quad 2 \quad 1)$

Finn ortogonalprojeksjonen av u på $W = \text{span}\{v_1, v_2\}$.

$$A = [v_1 \quad v_2] = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$\text{proj}_W(u) = Az$ der z er s.a. $A^T A z = A^T u$

$$A^T A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A^T u = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

Normalligningene er $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow z_1 = -1, \; z_2 = \frac{5}{3}$

$$\text{proj}_W(u) = Az = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 5/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 7/3 \\ 5/3 \end{pmatrix}$$

Verifiser ved å finne $u - \text{proj}_W(u)$ og at

$$\langle \text{proj}_W(u), u - \text{proj}_W(u) \rangle = 0.$$