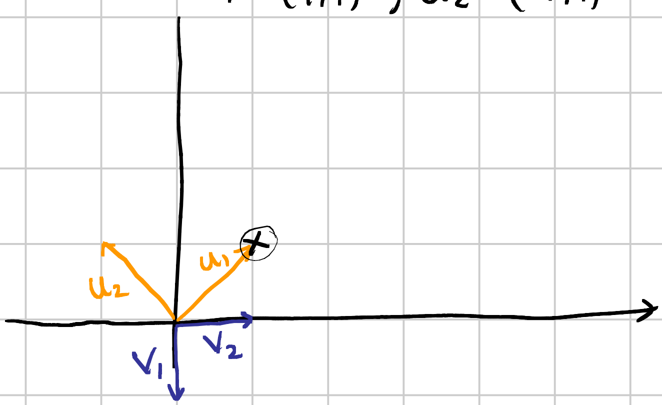
# 6.5 Basisskifte

Bilde: Endring av koordinatsystem i $\mathbb{R}^2$ og $\mathbb{R}^3$.

Anta at vi har 2 basiser i $\mathbb{R}^2$:

$B = \{u_1, u_2\}$ $\quad\quad$ $B' = \{v_1, v_2\}$

$u_1 = (1,1)$ , $u_2 = (-1,1)$ $\quad\quad$ $v_1 = (0,-1)$ , $v_2 = (1,0)$




Finn overgangsmatrisen fra B til B'.

$$[x]_B = \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \alpha u_1 + \beta u_2 = \alpha \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[u_1]_{B'} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = a v_1 + b v_2 = -v_1 + v_2 \text{ , så } [u_1]_{B'} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[u_2]_{B'} = \begin{bmatrix} c \\ d \end{bmatrix} = c v_1 + d v_2 = -v_1 - v_2 \text{ , så } [u_2]_{B'} = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$[X]_B = \alpha u_1 + \beta u_2 = \alpha(av_1 + bv_2) + \beta(cv_1 + dv_2)$$
$$= (\alpha a + \beta c)v_1 + (\alpha b + \beta d)v_2$$

$$[X]_{B'} = \begin{bmatrix} \alpha a + \beta c \\ \alpha b + \beta d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & c \\ b & d \end{bmatrix} [X]_B$$

$$[X]_{B'} = P[X]_B \quad , \quad \text{der} \quad P = \big[ [u_1]_{B'} \; [u_2]_{B'} \big]$$
$$P = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Gitt $[w]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, finn $[w]_{B'}$.

$$[w]_{B'} = P[w]_B = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$1u_1 + 0 \cdot u_2 = -1v_1 + 1 \cdot v_2$$

Så hvis $P$ er en overgangsmatrise fra $B$ til $B'$, da er

$$[V]_{B'} = P[V]_B$$

$$[V]_B = P^{-1}[V]_{B'}$$

6.6 Ortogonale matriser

* Oppstår f.eks. ved skifte fra en ortonormal basis til en annen.

**Def.** En kvadratisk matrise med egenskapen $A^{-1} = A^T$ kalles en ortogonal matrise.

Merk: $A^TA = I$ eller $AA^T = I$

**Eksempel:** Rotasjonsmatrisen i $\mathbb{R}^2$ er ortogonal:

$$A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$A^TA = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos^2\theta + \sin^2\theta & \cos\theta(-\sin\theta) + \sin\theta \cdot \cos\theta \\ \dots & \dots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Merk: Kolonnene i $A$ er ortonormale.

## Teorem 6.6.1

Følgende er ekvivalent for en $n \times n$-matrise $A$.

a) $A$ er ortogonal

b) Radvektorene i $A$ danner en ortonormal mengde i $\mathbb{R}^n$, med Euklidsk indreprodukt.

c) Søylevektorene i $A$ danner en ortonormal mengde i $\mathbb{R}^n$, med Euklidsk indreprodukt.

$\square$

**Bevis** a) $\Leftrightarrow$ b)

$$AA^T = \begin{bmatrix} - & r_1 & - \\ - & r_2 & - \\ & \vdots & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} | & | & \\ r_1 & r_2 & \cdots \\ | & | & \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} r_1 \cdot r_1 & r_1 \cdot r_2 & \cdots \\ r_2 \cdot r_1 & r_2 \cdot r_2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{bmatrix}$$

$AA^T = I$ hvis og bare hvis

$$r_i \cdot r_i = 1$$

$$r_i \cdot r_j = 0 \qquad i \neq j$$

$\square$

## Teorem 6.6.2

a) Inversen til en ortogonal matrise er ortogonal

b) Produktet av ortogonale matriser er — " — t

c) Hvis $A$ er ortogonal, så er $\det(A) = 1$ eller $\det(A) = -1$

Eks.

$$\det\Bigg(\underbrace{\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}}_{A}\Bigg) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\det(A^T) = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{vmatrix} = 1$$

$A^T = A^{-1}$