7.1 Egenverdier og egenvektorer

HØGSKOLEN I SØR-TRØNDELAG
14 & 17. mars 2006

Def. Gitt A, $n \times n$-matrise, $x \in \mathbb{R}^n$, $x \neq 0$
kalles egenvektor til A hvis og bare hvis det fins
λ skalar s.a.

$$Ax = \lambda x \qquad (*)$$

Skalaren λ kalles for egenverdi til A og x
er egenvektoren tilhørende egenverdien λ.

Fra $(*)$ har man $(\lambda I - A)x = 0 \qquad (**)$
for at λ skal være en egenverdi må det finnes
en løsning $x \neq 0$ til det homogene lineære systemet $(**)$
Mao.

$$\boxed{\det(\lambda I - A) = 0 \qquad \text{(karakteristisk ligning)}}$$

og $\det(\lambda I - A)$ er et polynom av grad n i λ som
kalles for karakteristisk polynom.

Eksempel:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Finn egenverdiene og egenvektorene.

$$\det(\lambda I - A) = \dots = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$$

$$\det(\lambda I - A) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = 2, \lambda_3 = 2$$

Vi har 3 egenverdier og to av dem er sammenfallende. Hva med egenvektorene?

Hvis λ er en egenverdi da vet vi at det fins minst en $x \in \mathbb{R}^n$ s.a. $Ax = \lambda x$

$$\Updownarrow$$

$$(\lambda I - A)x = 0$$

I eksempelet har vi 2 distinkte egenverdier og derfor har vi to egenrom. La oss finne basiser for disse to egenrom.

Vi skal løse det homogene systemet:

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 2 \\ -1 & \lambda-2 & -1 \\ -1 & 0 & \lambda-3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

først for $\lambda = 1$, så for $\lambda = 2$

$\lambda = 1$: $$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ som har løsning

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2s \\ s \\ s \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

en basis for egenrommet tilhørende $\lambda = 1$.

$\lambda = 2$: $$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$, løsn. $$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -s \\ t \\ s \end{pmatrix} = s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

basis for egenrommet tilhørende $\lambda = 2$.

I dag: 7.1 (resten) + 7.2

$\begin{bmatrix} \times & \times\ \times \\ 0 & \times \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} \times & 0 \\ \times & \times \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} \times & 0 \\ 0 & \times \end{bmatrix}$

Teorem 7.1.1 Hvis A er en $n\times n$ triangulær matrise, så er egenverdiene til A elementene på hoveddiagonalen til A.

Eks. $\begin{pmatrix} 1/4 & 0 & -1 \\ 0 & \sqrt{2} & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ har egenverdier $\lambda_1 = 1/4,\ \lambda_2 = \sqrt{2},\ \lambda_3 = -1$.

KOMPLEKSE EGENVERDIER

La $A = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$.

$$\det(\lambda I - A) = \det\begin{pmatrix} \lambda+2 & 1 \\ -5 & \lambda-2 \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda+2)(\lambda-2) + 5 = \lambda^2 + 1$$

$$\Rightarrow \lambda_1 = i \quad , \quad \lambda_2 = -i$$

De tilhørende egenvektorene:

$\lambda_1 = i$ $\begin{pmatrix} i+2 & 1 \\ -5 & i-2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$(i+2)x_1 + x_2 = 0$$
$$-5x_1 + (i-2)x_2 = 0$$

gir $x_2 = -(i+2)x_1$

$-5x_1 + 5x_1 = 0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -(i+2)t \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ -(i+2) \end{pmatrix}$$

En kompleks vektor og egenrommet tilhørende $\lambda_1 = i$ er et komplekst vektorrom (kap 10)

Foreløpig skal vi bare se på reelle matriser med reelle egenverdier.

$$A^k x = \lambda A^{k-1} x = \lambda A^{k-2}(Ax) = \lambda A^{k-2} \lambda x = \lambda^2 A^{k-2} x$$

$$A^k x = \lambda^k x ,$$

dvs. hvis λ er en egenverdi til A tilhorende x da er x en egenvektor til alle potenser A^k og λ^k er tilhorende egenverdi.

EGENVERDIER OG INVERTERBARE MATRISER (Teorem 7.1.4)

Hvis $\lambda = 0$ er en egenverdi til $A \Leftrightarrow A$ er ikke inverterbar.

Bevis $\lambda = 0$ er s.a. $\det(\lambda I - A) = 0 \Leftrightarrow \det(A) = 0$

$\Leftrightarrow A$ er ikke inverterbar.