7.2 Diagonalisering

HØGSKOLEN
I SØR-TRØNDELAG

Def. A $n \times n$ – matrise kalles diagonaliserbar
$\Leftrightarrow$ det fins en inverterbar P s.a. $P^{-1}AP$ er en diagonal matrise. Vi sier da at P diagonaliserer A.

Teorem 7.2.1 A er en $n \times n$ - matrise.

a) A er diagonaliserbar

$\Updownarrow$

b) A har n lineært uavh. egenvektorer.

Bevis $(a \Rightarrow b)$

Anta A diagonaliserbar $\Rightarrow \exists\ P = \underbrace{[p_1 \dots p_n]}_{\text{inverterbar}}$ s.a.

$P^{-1}AP = D$ der $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \lambda_2 & \\ 0 & & \ddots \ \lambda_n \end{pmatrix} = [\lambda_1 e_1 \ \ \lambda_2 e_2 \dots \lambda_n e_n]$

P inverterbar $\Rightarrow p_1, \dots, p_n$ er lineært uavhengige.

$AP = PD$

$[Ap_1 \ \ Ap_2 \dots Ap_n] = [\lambda_1 Pe_1 \ \ \lambda_2 Pe_2 \dots \lambda_n Pe_n]$

e_i kanoniske (standard) - vektorer

$\Rightarrow Ap_i = \lambda_i \underline{Pe_i} \Leftrightarrow Ap_i = \lambda_i p_i \Rightarrow p_i$ egenvektor, λ_i egenverdi til A $\square$

Eksempel:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$ med egenverdier $\lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = \lambda_3 = 2$

HØGSKOLEN I SØR-TRØNDELAG

Basis for de to egenromm:

$$p_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad p_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ og } p_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Da er $P = [p_1 \ p_2 \ p_3] = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Da er $P^{-1}AP = D$ der $P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Ikke alle matriser er diagonaliserbare!

Eksempel:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$ har egenverdier $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$

$\lambda = 1$

$\lambda I - A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad (I - A)x = 0 \iff \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow x_2 = 0, \ x_1 = t$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 0 \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

bare en lin. uavh. egenvektor for en 2x2-matrise, da er A ikke diagonaliserbar ved Teorem 7.2.1

Teorem 7.2.2

Hvis $v_1, \ldots, v_k$ er egenvektorer til A tilhørende distinkte (forskjellige) egenverdier $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ da er $v_1, \ldots, v_k$ lin. uavhengige.

Bevis (se boka...)

Følgesetning (Teorem 7.2.3)

Hvis A $n \times n$ har n distinkte egenverdier, så er A diagonaliserbar.

Er $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & \sqrt{5} & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ diagonaliserbar? Ja!

Algebraisk multiplisitet til en egenverdi er multiplisiteten av egenverdien som roten av det karakteristiske polynomet $\det(\lambda I - A) = 0$

Eks.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \lambda_1 = 1, \ \lambda_2 = \lambda_3 = 2$$

$$\det(\lambda I - A) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)^2$$

λ_1 har algebraisk multiplisitet 1 og

λ_2 —— " —— 2

Geometrisk multiplisitet til en egenverdi er dimensjonen til egenrommet tilhørende egenverdien.

Teorem 7.2.4 A $n \times n$-matrise λ egenverdi.

a) geometrisk multiplisitet $\leq$ algebraisk multiplisitet

b) A er diagonaliserbar $\Leftrightarrow$ geom. mult. = alg-mult. for alle egenverdiene.

Eksempel $\lambda_1 = 1$ med egenvektor $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ egenrommet har basis $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ og dimensjon 1 $\Rightarrow$ geom.mult = 1

$\lambda_2 = 2$ egenvektor: $s\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ egenrommet har dim 2 geom. mult. = 2.

$\Rightarrow$ alg. mult. λ_1 = geom. mult. λ_1

— " — λ_2 = — " — λ_2

og dette stemmer med at A er diagonaliserbar.