7.3 Ortogonal diagonalisering

Vi ser på spesialtilfellet der A er symmetrisk.

HØGSKOLEN
I SØR-TRØNDELAG

Teorem 7.3.1 A er symmetrisk $\Leftrightarrow$ man kan finne n ortonormale egenvektorer av A; $p_1, \ldots, p_n$.

Da har man at $P = [p_1 \ldots p_n]$ er inverterbar og ortogonal. $(P^{-1} = P^T)$

$$P^T P = I \qquad P^{-1} A P = D$$

$$P^T A P = D$$

Når en matrise A diagonaliseres ved bruk av en ortogonal matrise kalles A ortogonal-diagonaliserbar.

* Alle symmetriske matriser er ortogonal-diagonaliserbare.
og v.v.

Bevis: $(\Leftarrow)$ Anta at A er ortogonal-diag.

dvs. $P^{-1}AP = D \Leftrightarrow P^T A P = D$

$$A = PDP^T$$

$$A^T = (PDP^T)^T = (P^T)^T D^T P^T$$

$$= PDP^T = A$$

Teorem 7.3.2 A er symmetrisk $\Rightarrow$

a) egenverdiene til A er reelle tall.

b) egenvektorer fra forskjellige egenrom er ortogonale.

Merk: for å få en ortonormal basis av egenvektorer må egenvektorer fra samme egenrom ortogonaliseres med Gram-Schmidt.

HØGSKOLEN I SØR-TRØNDELAG

Prosedyre for å ortogonal-diagonalisere en symmetrisk matrise:

1. Finn en basis for hvert egenrom til A
2. Bruk Gram-Schmidt på hver av disse basisene for å finne en ortonormal basis for hvert egenrom til A.
3. Dann matrisen P med vektorene fra 2 som kolonner.

Oppg. 7.3.7 Ortogonal-diagonaliser matrisen $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

Beregning av egenverdier gir $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$.

1. Vi finner basis for egenrommet til $\lambda_1 = 0$:

$(\lambda I - A)x = 0$ dvs. $\begin{bmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

Løsn. til det homogene systemet: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_2 \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ $\quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Vi lar $p_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \|p_1\| = 1$

2. Vi finner en basis for egenrommet tilhørende $\lambda_2 = \lambda_3 = 3$:

$$(\lambda I - A)x = 0 \quad \text{dvs.} \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

Løsningen til det homogene systemet er

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(r+s) \\ r \\ s \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ er en basis til egenrommet.

3. Vi bruker Gram-Schmidt for å finne en ortonormal basis.

$$v_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{w_2 - \langle v_1, w_2 \rangle v_1}{\| w_2 - \langle v_1, w_2 \rangle v_1 \|}$$

$$w_2 - \langle v_1, w_2 \rangle v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot 1 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\| w_2 - \langle v_1, w_2 \rangle v_1 \| = \sqrt{(-1/2)^2 + (-1/2)^2 + 1^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$v_2 = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v_1 \perp v_2 \qquad \|v_1\| = \|v_2\| = 1$$

4. Teoremet over gir at $p_1 \perp v_1$, $p_1 \perp v_2$ og vi lar $p_2 = v_1$ og $p_3 = v_2$.

$$P = [p_1 \; p_2 \; p_3] = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} & -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ 1/\sqrt{3} & 0 & \sqrt{2}/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

Sjekk at $P^T P = I$ og $P^T A P = D$.