8.1 Lineære transformasjoner

HØGSKOLEN I SØR-TRØNDELAG

Def. En funksjon $T: V \to W$, V, W vektorrom kalles en linear transformasjon hvis og barehvis

a) $T(u+v) = T(u) + T(v)$

b) $T(\alpha \cdot u) = \alpha T(u)$ α -skalar

Når $V = W$ kalles T en linear operator.

Eksempel 1: Gitt $n \times m$-matrisen A.

$$T_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \quad \text{s.a.} \quad T_A(u) = Au$$

Bevis: a) $T_A(u+v) = A(u+v) = Au + Av = T_A(u) + T_A(v)$

b) $T_A(\alpha u) = A(\alpha u) = \alpha Au = \alpha T_A(u)$ OK.

Eksempel 2: $T: V \to W$ s.a. $T(u) = 0$ for alle $u \in V$.

kalles for null-transformasjonen. Er en linear transformasjon. Bevis som oppg.

Eksempel 3: $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $T(x) = x^2$

a) $T(x+y) = (x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = T(x) + T(y) + 2xy$

mao. T er ikke en linear transformasjon.

Oppg. 8.1.32 La $V = C[a,b] = \{\text{kontinuerlige funksjoner på } [a,b]\}$

La $T: V \to V$ $T(f) = 5f(x) + 3\int_a^x f(t)\,dt$.

Er dette en linear operator?

a) $T(f_1+f_2) = 5\,(f_1+f_2)(x) + 3\int_a^x (f_1+f_2)(t)\,dt$

$$= 5\,(f_1(x)+f_2(x)) + 3\int_a^x f_1(t)+f_2(t)\,dt$$

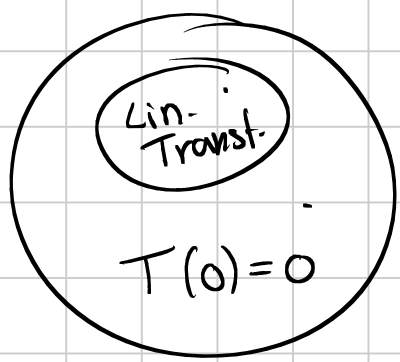
$$= \underbrace{5f_1(x) + 3\int_a^x f_1(t)\,dt}_{T(f_1)} + \underbrace{5f_2(x) + 3\int_a^x f_2(t)\,dt}_{T(f_2)}$$

$$= T(f_1) + T(f_2)$$ ok.!

b) tilsv.

så, ja T er en lineær transformasjon/operator.

Merk: (Teorem 8.1.1) Hvis $T: V \to W$ er en lineær transf. så er $T(\underbrace{0}_{\in V}) = \underbrace{0}_{\in W}$



Hvis $T(0) \neq 0$ så er T ikke-lineær.

$T: V \to W$

Merk: Gitt $v_1, \dots, v_n$ en basis for V og $w_1 = T(v_1), \dots, w_n = T(v_n)$

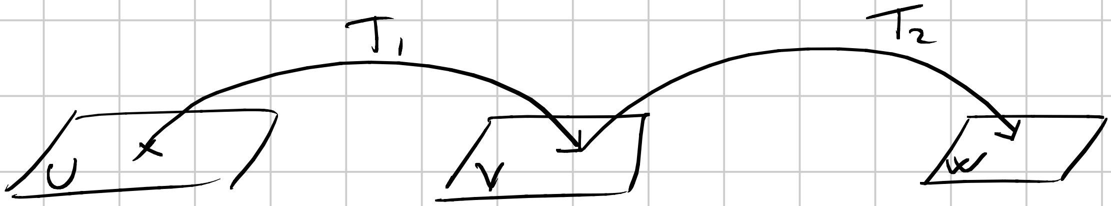
Lineære transformasjoner er fullstendig bestemt av $w_1, \dots, w_n$ fordi

$$\forall u \in V: \quad u = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$$

$$T(u) = T(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n)$$

$$= \alpha_1 w_1 + \dots + \alpha_n w_n$$

Komposisjon av transformasjoner



$T_1 : U \to V \qquad T_2 : V \to W$

$T : U \to W \quad , \quad T(u) = T_2 \circ T_1(u)$

$= T_2(T_1(u))$

Oppgave 8.1.31 a)

Gitt $\quad D(f) = f'(x) \quad$ og $\quad I(f) = \int_0^x f(t)\,dt$

D og I er lineære transformasjoner, finn $(I \circ D)(f)$
for $f(x) = x^2 + 3x + 2$. $\qquad = I(D(f))$

Først finner vi $D(f) = 2x + 3$

$$I(D(f)) = I(2x+3) = \int_0^x (2t+3)\,dt$$

$$= 2\int_0^x t\,dt + 3x = 2\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^x + 3x = \underline{\underline{x^2 + 3x}}$$