HØGSKOLEN
I SØR-TRØNDELAG

8.2 Kjerne og rekkevidde

A $n \times m$ -matrise $\quad$ nullrom $(A) = \{x \in \mathbb{R}^m : Ax = 0\}$

søylerom$(A) = \{b \in \mathbb{R}^n :$ det fins $x \in \mathbb{R}^m$ s.a. $Ax = b\}$

Kjerne og rekkevidde generaliserer begrepene nullrom og søylerom til en matrise til lineære transformasjoner.

Def. Gitt $T: V \to W$ en lineær transformasjon.

$\ker(T) = \text{kjerne}(T) = \{u \in V : T(u) = 0\}$

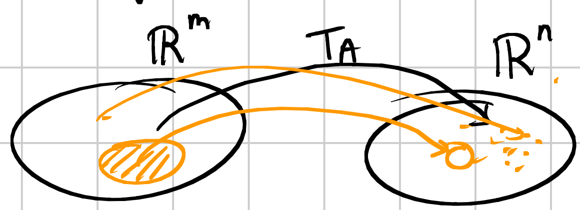
range — $R(T) = \text{rekkevidde}(T) = \{w \in W :$ det fins $v \in V$ s.a. $w = T(v)\}$

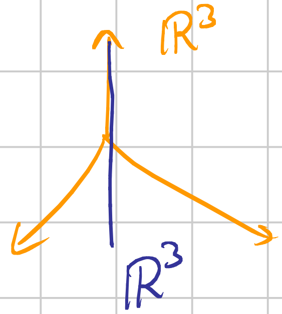
Eksempel 0: Hvis A er en $n \times m$ -matrise og

$T_A : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ s.a. $T_A(u) = Au$

$$\text{nullrom}(A) = \{u \in \mathbb{R}^m \text{ s.a. } \overbrace{T_A(u) = 0}^{Au=0}\} = \text{kjernen til } T_A$$

$$\text{søylerom}(A) = \{b \in \mathbb{R}^n \text{ s.a. det fins } x \in \mathbb{R}^m \text{ s.a. } T_A(x) = b\}$$
$$= R(T_A)$$





$T: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$

$T(x,y,z) = (x,y,0)$

$T(0,0,z) = (0,0,0)$

$\ker(T) = \{u \in V \text{ s.a. } T(u) = 0\}$

$R(T) = \{w \in W \text{ s.a. } \exists\, u \in V \text{ s.a. } T(u) = w\} = \mathbb{R}^2$

Eksempel 3: $V = C'(-\infty, +\infty)$, $W = F(-\infty, \infty)$

$D: V \to W \qquad D(f) = f'(x)$

Hva er $\ker(D)$? Alle funksjoner som har null som derivert, dvs. alle konstanter.

Teorem 8.2.1

$T: V \to W$ linear transformasjon

a) $\ker(T)$ er et underrom av V

b) $R(T)$ — " — W.

Bevis b) $T(0) = 0$ siden T er en lin. trans., så $0 \in R(T)$

La nå $w_1, w_2 \in R(T)$, må vise at $w_1 + w_2 \in R(T)$, dvs. må finne en $u \in V$ s.a. $T(u) = w_1 + w_2$

$w_1 + w_2 = T(v_1) + T(v_2) = T(v_1 + v_2) = T(u)$

siden $w_1, w_2 \in R(T)$ — siden T er lin. trans.

Må også vises at $kw_1 \in R(T)$ $\square$

Merk: Hvis T (lin. trans.) er definert over hele V, da er $R(T) = T(V)$ er et underrom av W.

Hvis U er et underrom av V og T er def. over hele U, da $T(U) = \{b \in W \text{ s.a. } \exists\, u \in U \text{ s.a. } T(u) = b\}$ er et underrom av W.

$T: V \to W$

$$\text{rank}(T) = \dim(R(T))$$
$$\text{nullity}(T) = \dim(\ker(T))$$
$$\text{rank}(T) + \text{nullity}(T) = \dim(V)$$

31. mars

Oppg. 4 MA08 våren 1995

b) $\ker(T) = R(T)$ $\qquad \underbrace{\dim(\ker(T))}_{\text{nullity}(T) = d} = \dim(R(T)) = \text{rank}(T)$

Dimensjonsteoremet:

$$\text{rank}(T) + \text{nullity}(T) = \dim(V)$$
$$\dim V = 2d \text{ , dvs. partall}$$

c) Oppgitt: $\dim(V) = 2d$, $d \geq 1$. $\qquad T: V \to W$

Vi må konstruere en T s.a. $\ker(T) = R(T)$.

Anta at $v_1, v_2, \dots, v_{2d}$ er en basis for V.

generelt

$$\begin{cases} v = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n \\ T(v) = T(c_1 v_1 + \dots + c_n v_n) \\ \quad = c_1 T(v_1) + \dots + c_n T(v_n) \end{cases}$$

Vi vet at alle lin. trans. er fullstendig bestemt av de transformerte av basis elementene, $T(v_1), \dots, T(v_{2d})$

Vi lar $T(v_1) = v_{d+1}$, $T(v_2) = v_{d+2}, \dots, T(v_d) = v_{2d}$,

$T(v_{d+1}) = 0, \dots, T(v_{2d}) = 0$

$v_1, v_2, \quad \dots \quad v_d,$

$v_{d+1}, v_{d+2}, \dots \quad v_{2d}$

Dette gir

$$R(T) = \text{span}\{T(v_1), \dots, T(v_{2d})\}$$

$$= \text{span}\{T(v_1), \dots, T(v_d)\}$$

$$= \text{span}\{v_{d+1}, \dots, v_{2d}\}$$

$\dim(R(T)) = \text{rank}(T) = d$ (antall vektorer)

$\ker(T) = \{x : T(x) = 0\}$

hvis $v = \lambda_{d+1} v_{d+1} + \dots + \lambda_{2d} v_{2d}$

da er $T(v) = 0 \Rightarrow v \in \ker(T)$

da er $\text{span}\{v_{d+1}, \dots, v_{2d}\} \subset \ker(T)$

Dimensjonsteoremet sier: $\dim(\ker(T)) = \dim V - \text{rank}(T)$
$= 2d - d = d$

$\Rightarrow \text{span}\{v_{d+1}, \dots, v_{2d}\} = \ker(T)$

mao. $\ker(T) = R(T)$. så T eksisterer.