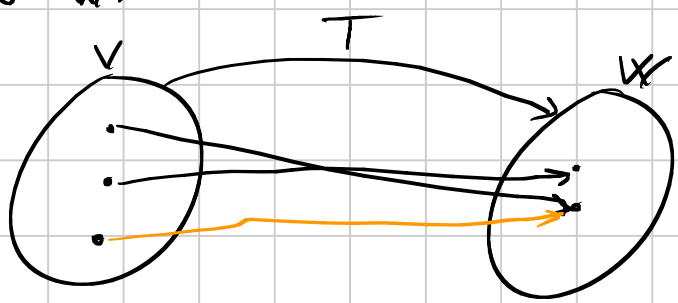
8.3 Invers av lineære transformasjoner

Def. En lineær transformasjon $T: V \to W$ kalles **en-til-en (injektiv, en-entydig)** hvis den avbilder distinkte vektorer av V til distinkte vektorer av W.



Eksempel 1: $T: \mathbb{P}_n \to \mathbb{P}_{n+1}$

$T(p) = xp(x)$, er en en-til-en trans.

bevis: $p(x) = c_0 + c_1 x + \dots + c_n x^n$

$q(x) = d_0 + d_1 x + \dots + d_n x^n$

$p \neq q$, dvs. for minst en indeks i har vi $c_i \neq d_i$.

Vil vise at $T(p) \neq T(q)$.

$T(p) = c_0 x + c_1 x^2 + \dots + c_n x^{n+1}$

$T(q) = d_0 x + d_1 x^2 + \dots + d_n x^{n+1}$

og dermed $T(p) \neq T(q)$ fordi koeff. er de samme.

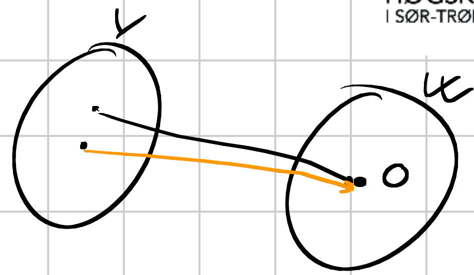
Teorem 8.3.1

Hvis $T: V \to W$ er en linear transformasjon da er følgende påstander ekvivalente.

a) T er en-til-en

b) $\ker(T) = \{0\}$

c) $\text{nullity}(T) = 0$



Bevis

$a \Rightarrow b$: Anta T en-til-en. Anta $v \in \ker(T)$, da $T(v)=0$

Samtidig $T(0) = 0$ (gjelder for alle lin. trans.)

og da må $v = 0$, ellers er $v \neq 0$ og

$$T(v) = T(0) = 0,$$

da er T ikke en-til-en.

$b \Rightarrow a$: kan vises

Eksempel

(Bruk av Teorem 8.3.1 – Eksamen MNFMA108 nov. 2001)

La V være vektorrom av alle polynomer på formen $f(x) = a + bx^2$, $a, b \in \mathbb{R}$

La $T: V \to \mathbb{R}^2$ $\quad T(f) = \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \end{pmatrix}$.

Vis at T er en-til-en linear transformasjon.

Løsning: (Vis selv at T er en lin. transf.)

$$\ker(T) = \{ f : T(f) = \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \} = \{ f : \begin{pmatrix} a \\ a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \}$$

$= \{ f(x) = a + bx^2 : a = 0,\ b = 0 \} = \{ f : f(x) = 0 \}$

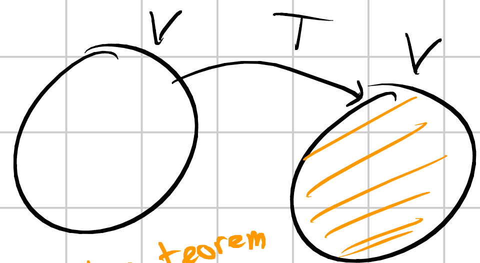
$= \{ 0 \text{ polynom} \}$

siden $\ker(T) = \{0\}$ er T en-til-en. (ved T. 8.3.1)

$\square$

Teorem 8.3.2: V endelig-dimensjonalt vektorrom. $T : V \to V$ lineær operator.

T en-til-en $\Leftrightarrow$ $R(T) = V$



Bevis T en-til-en $\overset{8.3.1}{\Leftrightarrow}$ $\ker(T) = \{0\}$ $\overset{\text{dim-teorem}}{\Leftrightarrow}$ $\dim V = \dim(R(T))$

$\Leftrightarrow$ $R(T) = V$ $\quad (R(T) \subset V)$

Invers av en lineær transformasjon.

Def. $T : V \to W$ lin. transformasjon. $R(T) \subset W$

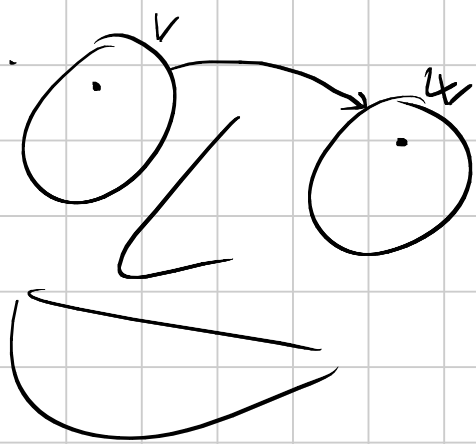
Hvis det fins en $\tilde{T}$ lin.trans. slik at

$\tilde{T} : R(T) \to V$ og

$\tilde{T}(T(v)) = v$ for alle $v \in V$

Da kalles $\tilde{T}$ den inverse av T

og $\tilde{T} = T^{-1}$



Merk: T^{-1} eksisterer for en gitt lin. trans. $\Leftrightarrow$ T er en-til-en (Bevis "by handwaving")

<u>Eksempel</u> $T: V \to \mathbb{R}^2$ $\quad V = \{ f(x) = a + bx^2 , a,b \in \mathbb{R} \}$

$T(f) = \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ a+b \end{pmatrix}$ er en-til-en $\Rightarrow \exists$ invers.

$T^{-1}: R(T) \to V$, $R(T) = \{ \begin{pmatrix} a \\ a+b \end{pmatrix} , a,b \in \mathbb{R} \} = \mathbb{R}^2$

$T^{-1}: \mathbb{R}^2 \to V$ $\quad T^{-1}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \alpha + (\beta - \alpha)x^2$

sjekk! $\quad T^{-1}(T(f)) = f$

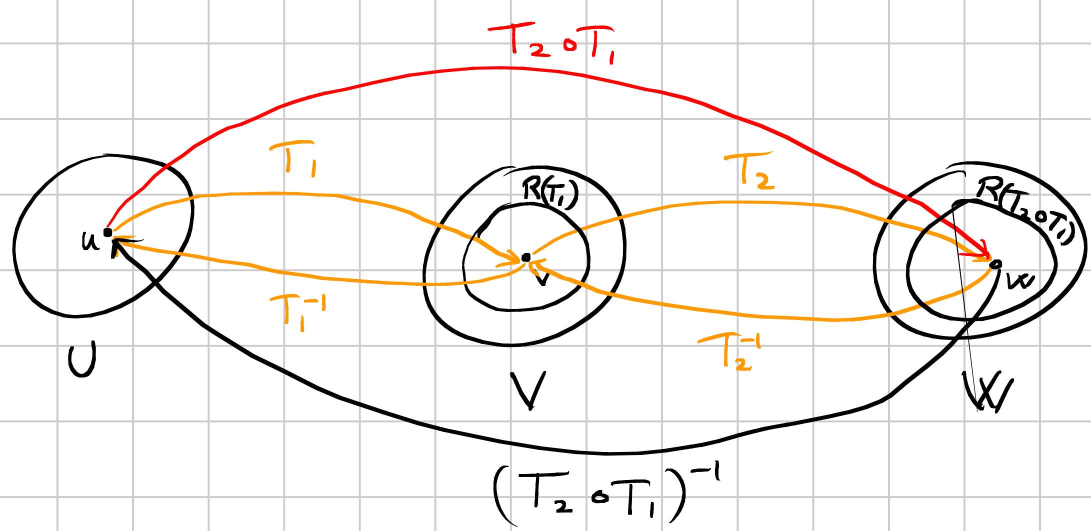
$\square$

<u>Teorem 8.3.3</u>: Invers av komposisjonen av T_1 og T_2

$T_1: U \to V$, $T_2: V \to W$ er en-til-en

a) $T_2 \circ T_1$ er en-til-en

b) $(T_2 \circ T_1)^{-1} = T_1^{-1} \circ T_2^{-1}$



Oppgave 8.3.12 b) $T_{1,2}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$

$$T_1(x,y) = (x+y,\ x-y)\ ,\quad T_2(x,y) = (2x+y,\ x-2y)$$

(a) vises at T_1 og T_2 er en-til-en)

Finn $T_1^{-1}(x,y)$, $T_2^{-1}(x,y)$ og $(T_2 \circ T_1)^{-1}$.

$$T_1^{-1}(a,b) = (x,y) \iff (a,b) = T_1(x,y) = (x+y,\ x-y)$$

$$\begin{matrix} a = x+y \\ b = x-y \end{matrix} \iff \begin{matrix} x = \frac{a+b}{2} \\ y = \frac{a-b}{2} \end{matrix}$$

$$T_1^{-1}(a,b) = \left(\frac{a+b}{2},\ \frac{a-b}{2}\right)$$, tilsvarende

$$T_2^{-1}(a,b) = \left(\frac{b+2a}{5},\ \frac{a-2b}{5}\right)$$

$$(T_2 \circ T_1)^{-1} = T_1^{-1} \circ T_2^{-1}$$

$$T_1^{-1} \circ T_2^{-1}(x,y) = T_1^{-1}(T_2^{-1}(x,y)) = \underline{\underline{\left(\frac{3a-b}{10},\ \frac{a+3b}{10}\right)}}$$

$$= T_1^{-1}\left(\frac{b+2a}{5},\ \frac{a-2b}{5}\right) = \left(\frac{\frac{b+2a}{5} + \frac{a-2b}{5}}{2},\ \frac{\frac{b+2a}{5} - \frac{a-2b}{5}}{2}\right)$$