8.5 Similaritet

$T: V \to V$

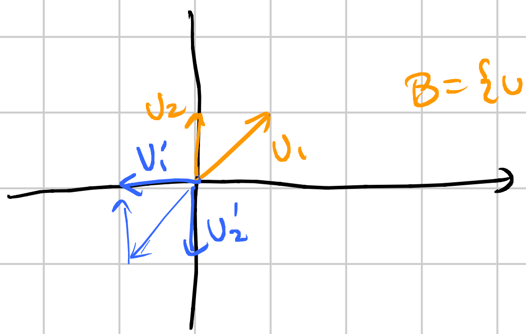
Gitt $B = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ og $B' = \{u_1', u_2', \dots, u_n'\}$ basis til V.

(s. 342 – 343)

Vi har lært at transisjonsmatrisen (overgangsmatrisen) fra B' til B er $P = [\,[u_1']_B \;\dots\; [u_n']_B\,] = [p_1 \dots p_n]$

s.a. $P[v]_{B'} = [v]_B$ for alle $v \in V$.

Intermezzo



$B = \{u_1, u_2\}$

$u_1' = -u_1 + u_2$

$[u_1']_B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

fra B til B' $\quad Q = [\,[u_1]_{B'} \;\dots\; [u_n]_{B'}\,] = P^{-1}$

og s.a. $Q[v]_B = [v]_{B'}$ for alle $v \in V$

Vi vil finne sammenhengen mellom $[T]_B$ og $[T]_{B'}$.

Oppg. 8.4.4 $\quad T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ -2x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}$ $\qquad B = \{u_1, u_2\}$

$u_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad u_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$T(u_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}_B$

$T(u_2) = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}_B$

$[T]_B = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}}_{D}$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \qquad \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}}_{B}$$

HØGSKOLEN I SØR-TRØNDELAG

$$AB = \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}}_{C} \qquad BD = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} = C$$

$$AB = BD$$

$$B^{-1}\underline{A}B = \underline{D}$$

A og D er similære.

La $T: R^2 \to R^2$ være en lineær operator definert ved

$$T\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ -2x_1 + 4x_2 \end{bmatrix}$$

La $B = \{e_1, e_2\}$ $\quad e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \; e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$T(e_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} \qquad [T(e_1)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$T(e_2) = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \qquad [T(e_1)]_B = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$[T]_B = \left[\, [T(e_1)]_B \;\; [T(e_2)]_B \,\right] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}$$

Hva er $[T]_{B'}$ der $B' = \{u_1', u_2'\}$ $\quad u_1' = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \; u_2' = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$T(u_1') = \begin{bmatrix} 1+1 \\ -2+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix} = 2 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 2 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad [T(u_1')]_{B'} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T(u_2') = \begin{bmatrix} 1+2 \\ -2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \end{bmatrix} = 3 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + 6 \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad [T(u_2')]_{B'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$[T]_{B'} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Transformer

$[x]_B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}_B$, dvs. finn $T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = [T]_B [x]_B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$

$$[x]_B = 0 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix} + 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \longrightarrow [x]_{B'} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[T]_{B'} [x]_{B'} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix} = -2 \cdot u_1' + 3 \cdot u_2' = -2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + 3 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Hva er det(T)? [Må velge en basis!]

Med basis $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$: $\det(T) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 6$

—— " —— $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ $\det(T) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$

Def. En egenskap til kvadratiske matriser kalles en **similær invariant** hvis egenskapen deles av to similære matriser.

Def. Hvis A og B er kvadratiske matriser sier vi at B er **similær** til A hvis og bare hvis det finnes en invertibel matrise P slik at

$$\boxed{B = P^{-1} A P}$$

$[T]_B$ og $[T]_{B'}$ fra eks over er similære!

Kolonnene i P er $[u_1']_B = \begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$
(Basisskifte fra B' til B)

$[u_2']_B = \begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$ $\rightarrow P = \begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{bmatrix}$

$P^{-1} = \begin{bmatrix}2 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}$

$$P^{-1}[T]_B P = \begin{bmatrix}2 & -1\\-1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\-2 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & 0\\0 & 3\end{bmatrix} = [T]_{B'}$$

* Noen similærinvarianter: Determinant, rang, nullitet, egenverdier (NB! ikke egenvektorer)

Viser at det er en similærinvariant:

$$\det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\cdot\det(A)\cdot\det(P)$$
$$= \det(P)^{-1}\cdot\det(P)\cdot\det(A) = \det(A).$$

Påskenøtt